DOI: 10.22363/2224-7580-2025-4-69-80
EDN: MXKGIU

ФАКТОР-МНОЖЕСТВО КАК СРЕДСТВО КОНСТРУКТИВНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КЛАССОВ ЧИСЕЛ

С.Я. Серовайский

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
Казахстан, 050040, Алматы, пр. аль-Фараби, д. 71

Аннотация. Дается конструктивное определение натуральных, целых, рациональных и действительных чисел, в основе которого лежит понятие фактор-множества. Показывается, что обобщениями этих конструкций являются процедуры построения группы Гротендика и пополнения метрического пространства, которые, в свою очередь, оказываются частными случаями свободных функторов.

Ключевые слова: числа, фактор-множество, группа Гротендика, метрическое пространство, свободный функтор

Все вещи суть числа.
Пифагор

1. Зачем нужна математика

Когда-то очень давно Пифагор, стоявший у истоков как философии, так и математики, провозгласил существование двух миров – реального мира, в котором мы живем, и идеального мира человеческих идей. И если обычные науки (физика, химия, биология, экономика и др.) напрямую связаны с окружающим миром, то математика оперирует исключительно с абстракциями. Числа и функции, кривые и уравнения, производные и алгоритмы, вероятности и интегралы, матрицы и логарифмы как таковые отсутствуют в материальном мире. Можно увидеть двух человек, два дерева, два дома, но никак не число «два».

Да, конечно, реальный и идеальный мир, явления природы и математика определенным образом связаны между собой, а иначе кому бы нужна была математика. К примеру, размер арбуза можно охарактеризовать его массой, которая оказывается числом; появление герба при подбрасывании монеты можно оценить вероятностью; путь, пройденный автомобилем, можно описать кривой, а распространение тепла от горящего костра – дифференциальным уравнением в частных производных. Число, вероятность, кривая и уравнение относятся к идеальному миру математики. Однако они оказываются математическими моделями реально существующих объектов – арбуза, монеты, автомобиля и костра. Математическая модель представляет собой мост, связывающий окружающий мир с математикой. Поставив в соответствие объекту природы его модель, мы получаем чисто математическую задачу, которая может быть исследована средствами математики. Полученные в результате выводы могут быть интерпретированы с позиций рассматриваемой предметной области, что соответствует переводу полученной информации с языка математики на язык природы, то есть переходу по тому же мосту в обратном направлении. Именно это обстоятельство превращает математику в мощнейшее средство познания окружающего мира и тем самым оправдывает ее существование.

Важнейшими математическими объектами являются числа. Фактически всё, что изучает математика, в конечном итоге сводится к числам. Вспомним, как они появились исторически.

2. Как появились числа

Для начала отметим, что числа бывают разные. Прежде всего, мы имеем дело с натуральными числами 1, 2, 3 и т.д. Они появились в процессе счета, когда возникла необходимость оценивать размеры групп каких-либо однотипных объектов, сравнивая подобные группы между собой. Например, на этом берегу реки деревьев как будто больше, чем на том. Действительно, каждому из деревьев на той стороне можно сопоставить какое-то конкретное дерево на этой стороне, и тогда некоторым деревьям на этой стороне ничего не будет соответствовать на противоположном берегу. И точно: здесь их семь, а там только три. 7 и 3 являются ***натуральными числами***.

А вот задача иной природы. У меня было некоторое количество денег. Иду я по улице и вижу – лежат кем-то давно утерянные пять рублей. Мне они, конечно, пригодятся! При этом возникает естественный вопрос, сколько же у меня теперь денег? Хорошенько подумав, я прихожу к выводу, что теперь у меня в действительности три рубля. Так сколько же денег у меня было изначально? Разгадка простая. Изначально денег у меня было даже меньше, чем ничего, поскольку я был кому-то должен два рубля, и вот теперь благодаря удачной находке я смогу полностью рассчитаться с долгами и получить остаток в размере трех рублей. Тем самым имевшаяся у меня денежная сумма может быть охарактеризована числом –2, которое будучи отрицательным, действительно меньше, чем ничего, то есть нуля. Отрицательные числа вместе с натуральными и нулем составляют класс ***целых чисел***.

Еще одна жизненная ситуация. Нас собралось пять человек. Захотелось перекусить. При этом оказалось, что на всю компанию имеется только три яблока. Решили делить по справедливости, то есть поровну. Сколько же яблок получит каждый из нас? Определенно каждый что-то получит, но, увы, полученная доля не составит даже одного яблока. Тем самым искомая величина лежит между нулем и единицей: каждый получает 3/5 яблока, что соответствует ***рациональному***, а не целому числу.

А теперь мы хотим измерить длину окружности единичного диаметра. Как там учили в школе? Вписываем в круг правильный треугольник. Стороны треугольника являются отрезками, стало быть, периметр посчитать несложно. Вот только он определенно меньше длины окружности. Хорошо, теперь вписываем в круг квадрат и вычисляем его периметр. Это уже ближе к желаемому результату, но всё равно еще недостаточно. Ладно, впишем в круг правильный пятиугольник, шестиугольник и т.д. И в пределе мы как раз получаем круг. Тем самым длина окружности получается как предел периметра вписанных правильных многоугольников, когда число их сторон неограниченно возрастает. Этот предел действительно существует, но, к сожалению, ему не соответствует ни одно рациональное число. Полученное значение, обозначаемое через π, иррационально и относится к классу ***действительных чисел***.

Мы рассмотрели жизненные ситуации, приводящие к определению конкретных натуральных, целых, рациональных и действительных чисел. Однако хотелось бы дать полное описание этих числовых классов.

3. Определение числовых классов

Вспомним наш пример с определением натурального числа. Откуда мы знаем, что на том берегу реки растут именно три дерева? Мы их посчитали. Как это можно сделать? Можно просто загибать пальцы: например, первому пальцу соответствует это дерево, следующему – то, а последующему – вон то. Деревья закончились. Их оказалось столько же, сколько загнутых пальцев.

Что мы делали в действительности? У нас есть два множества – деревьев и загнутых пальцев. Мы установили между ними взаимно однозначное соответствие. Очевидно, два множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, имеют что-то общее. То, что объединяет множества произвольной природы, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, в теории множеств называется ***мощностью***.

А еще следует отметить, что множества бывают, грубо говоря, двух типов – малые и большие. Малое множество обладает тем свойством, что принципиально невозможно установить взаимно однозначное соответствие между ним и его частью: стоит нам исключить хотя бы один из загнутых пальцев, и взаимно однозначное соответствие между пальцами и деревьями будет нарушено. А вот для больших множеств это уже необязательно. Возьмем две концентрические окружности и проведем луч из их центра. Каждой точке меньшей окружности в точности соответствует одна точка на большой окружности, находящаяся на том же луче, хотя длина меньшей окружности определенно меньше длины большей окружности. Малые множества называются ***конечными***, а большие – ***бесконечными***. Таким образом, ***натуральные числа*** определяются как мощности непустых конечных множеств.

Обратимся теперь к определению целых чисел. У меня было неизвестное количество денег, которое мы обозначим через x. Мы добавили к нему 5 рублей, в результате чего получилось 3 рубля. Тем самым справедливо равенство $x + 5 = 3$, являющееся математической моделью рассматриваемой системы. Таким образом, искомое число -2 оказывается решением этого уравнения. В общем случае ***аддитивным уравнением*** называется задача определения одного из слагаемых по значению суммы и второго слагаемого. Это соответствует соотношению $x+a=b$, где параметры a и b считаются известными. Теперь мы определяем ***целые числа*** как решения всевозможных аддитивных уравнений, параметрами которых являются натуральные числа или нуль.

Аналогичным образом определяются рациональные числа. Хочется определить количество яблок x, которое достанется каждому из пяти человек при наличии трех яблок. Эта задача соответствует уравнению $x \cdot 5 = 3$, называемому мультипликативным. Здесь требуется определить один из сомножителей по известным значениям произведения и второго сомножителя. Решением этой задачи как раз и является рациональное число 3/5. В общем случае имеем ***мультипликативное уравнение*** $x \cdot a=b$, где параметры a и b считаются известными. Теперь мы определяем ***рациональные числа*** как решения мультипликативных уравнений, параметрами которых являются всевозможные целые числа, причем первый из них отличен от нуля.

Наконец, действительное число π мы определяли как предел последовательности периметров правильных многоугольников, вписанных в круг единичного диаметра, когда число их сторон неограниченно возрастает. Легко убедиться, что значение каждого такого периметра представляет собой рациональное число. Кроме того, с ростом числа сторон многоугольников их периметры неограниченно сближаются между собой. Последовательности, обладающие подобным свойством, называются ***фундаментальными***. Под ***действительными числами*** понимаются те значения, к которым постепенно приближаются элементы фундаментальных последовательностей рациональных чисел, или, как это называется в математическом анализе, пределы этих последовательностей.

Все приведенные выше определения вполне корректны. Однако возникает один вопрос: откуда мы знаем, что определяемый объект (соответствующий числовой класс) на самом деле существует? Действительно, откуда следует, что множества, связанные взаимно однозначным соответствием, должны иметь какую-то общую характеристику, а если должны, то что это такое? Откуда следует, что указанные уравнения действительно имеют решения, а если имеют, то какие именно? Откуда взялась уверенность, что любая фундаментальная последовательность рациональных чисел на самом деле сходится, а если сходится, то куда конкретно?

В математике приняты два способа определения объектов. Во-первых, мы можем непосредственно предъявить определяемый объект. Во-вторых, можем указать свойство, характерное для данного объекта, и только для него. Первый способ является конструктивным, а второй – нет. Собственно, такие приемы используются и в обыденной жизни. К примеру, если мы хотим кому-то объяснить, что такое Солнце, то мы можем просто указать пальцем в небо: это вон та яркая штука. А можно сказать, что это звезда, вокруг которой вращается Земля. Оба утверждения в принципе верны.

Приведенные выше определения числовых классов не являются конструктивными. В математике неконструктивные определения считаются вполне приемлемыми (таковыми являются, например, многообразные теоремы существования). Однако если имеется возможность предъявить явным образом определяемый объект, то желательно все-таки это делать.

Можно ли дать конструктивное определение числовых классов? Ответ на этот вопрос оказывается положительным, причем ключевым понятием здесь оказывается фактор-множество.

4. Понятие фактор-множества

В основе определения натуральных чисел было существование взаимно однозначного соответствия между множествами. Это свойство является частным случаем понятия эквивалентности. ***Эквивалентность*** каких-либо двух объектов некоторого семейства означает наличие у них чего-то общего. В данном случае эквивалентность множеств подразумевает существование между их элементами взаимно однозначного соответствия.

А еще можно, к примеру, считать, что два натуральных числа эквивалентны, если они имеют один и тот же остаток от деления на число 3; две точки на плоскости эквивалентны, если они лежат на одной и той же окружности с центром в начале координат; два тела эквивалентны, если они имеют одинаковую массу; два человека эквивалентны, если они живут в одной стране. Возникает вопрос, что происходит с рассматриваемым семейством объектов (натуральных чисел, точек на плоскости, материальных тел, людей и т.п.) после определения там эквивалентности.

Рассмотрим, к примеру, натуральные числа с указанной эквивалентностью (на окружности). Для начала берем число 1, которое при делении на 3 имеет остаток 1. Число 2 также не делится на 3 и неэквивалентно 1, имея 2 в качестве остатка от деления на 3. А вот число 3 на 3 уже делится, и тем самым неэквивалентно обоим предшествующим натуральным числам. Однако число 4 при делении на 3 имеет остаток 1, а значит, эквивалентно единице; 5 оказывается эквивалентным двойке, 6 – тройке, а 7 – уже как единице, так и четверке.

До определения указанной эквивалентности все натуральные числа были для нас абсолютно равноправны. Теперь ситуация изменилась. Можно собрать вместе все числа, имеющие один и тот же остаток от деления на 3. В результате все натуральные числа разбиваются на три класса $\{1, 4, 7, 10, \ldots\}$, $\{2, 5, 8, 11, \ldots\}$ и $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$. Характерно, что все числа одного и того же класса эквивалентны между собой и не эквивалентны ни одному числу из других классов эквивалентности. При этом совокупность всех классов эквивалентности (в данном случае таковых три) и является ***фактор-множеством***
рассматриваемого множества натуральных чисел по выбранному отношению эквивалентности. Таким образом, определив на некотором множестве эквивалентность, мы переходим к фактор-множеству, разбивая исходное множество на классы эквивалентности.

В частности, если две точки на плоскости считаются эквивалентными, когда они лежат на одной и той же окружности с центром в начале координат, то соответствующее фактор-множество будет состоять из всевозможных концентрических окружностей с единым центром, то есть каждый класс эквивалентности представляет собой совокупность точек из какой-либо из этих окружностей. Аналогично фактор-множество множества материальных тел с выбранной ранее эквивалентностью будет состоять из совокупности всевозможных тел, масса которых принимает какое-то определенное значение. Наконец, фактор-множество множества людей с указанной эквивалентностью состоит из совокупности граждан той или иной конкретной страны. При этом все жители одной страны оказываются эквивалентными в указанном смысле, а любая пара жителей разных стран эквивалентна уже не будет.

Как же теперь воспользоваться понятием фактор-множества для конструктивного определения числовых классов?

5. Конструктивные определения чисел

Если задана некоторая совокупность чего-либо и эквивалентность на ней, то соответствующее фактор-множество представляет собой конкретный однозначно описанный объект. Ранее натуральные числа были определены как мощности непустых конечных множеств. При этом определенные сомнения здесь вызывало лишь понятие мощности, о котором говорилось, что это есть всё то общее, что имеется у тех множеств, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие. Однако оставалось совершенно не ясным, что же это такое.

Вспоминаем, что существование взаимно однозначного соответствия представляет собой эквивалентность множеств. Тогда соответствующее фактор-множество будет состоять из каких-то классов эквивалентности. При этом все объекты одного и того же класса, то есть множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, оказываются эквивалентными между собой, а любые два множества из различных классов эквивалентными не будут. Принадлежность одному и тому же классу эквивалентности как раз и является тем общим свойством, которое объединяет все множества, связанные взаимно однозначным соответствием, и только их. Таким образом, в качестве мощности множества естественно выбрать соответствующий ему класс эквивалентности, то есть вполне конкретный объект – элемент фактор-множества, который состоит из всех множеств, эквивалентных данному.

Однако возникает естественный вопрос, получили ли мы то самое, что хотели определить? К примеру, под числом 3 мы как будто понимаем некоторую количественную характеристику рассматриваемых объектов, а никак некий элемент какого-то там фактор-множества? Однако подумаем, почему трем пальцам, трем деревьям, трем автомобилям и т.д. мы ставим в соответствие одно и то же число 3? Исключительно потому, что эти совокупности объектов оказываются эквивалентными в указанном смысле, то есть принадлежат одному и тому же классу эквивалентности. А слово «три» – это лишь наименование этого класса. Таким образом, используемое в обычной жизни число 3 прекрасно согласуется с его конструктивным определением, основанным на понятии фактор-множества.

Обратимся теперь к определению целого числа. Под таковым мы понимали решение x аддитивного уравнения $x + a = b$, где a и b представляют собой произвольные параметры, являющиеся элементами уже определенного множества натуральных чисел. При этом возникает естественный вопрос, что же это за решение и существует ли оно вообще? Понятно, что решение этого уравнения однозначно определяется его параметрами. Так, может быть, в качестве искомой величины x следует просто выбрать пару чисел (a, b) – конкретный объект, существование которого сомнения не вызывает?

К сожалению, такое определение не годится. Дело в том, что различные уравнения могут иметь одно и то же решение. Так, к тому же решению $x = -2$ приводит не только указанное ранее уравнение $x + 5 = 3$, но и, к примеру, уравнение $x + 6 = 4$. Следовательно, мы не можем сказать, что целое число – это пара натуральных чисел. Однако есть основание полагать, что приведенные уравнения определенно имеют что-то общее между собой. В частности, совсем неслучайно их параметры оказываются связаны равенством $5 + 4 = 6 + 3$. Это наводит на мысль о том, что на множестве пар натуральных чисел следует ввести отношение эквивалентности. В частности, две такие пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) будем считать эквивалентными при выполнении равенства $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$. Все эквивалентные в указанном смысле пары натуральных чисел, и только они, определяют одно и то же решение аддитивного уравнения. Таким образом, под целыми числами (решениями уравнения) можно понимать всевозможные классы эквивалентности пар натуральных чисел, то есть опять элементы конкретного фактор-множества.

Насколько полученный результат согласуется с житейским восприятием отрицательного числа? В жизни отрицательные числа появляются именно в процессе решения задач, аналогичных описанной выше, то есть при решении аддитивных уравнений. Однако одно и то же целое число является решением не одного уравнения, а целого класса подобных уравнений. Можно вновь считать, что конкретное целое число – это просто название данного класса эквивалентности. Таким образом, определение множества целых чисел как соответствующего фактор-множества вполне естественно. Очевидно, что рациональные числа могут быть определены по той же схеме с заменой аддитивного уравнения на мультипликативное.

Вернемся теперь к определению действительных чисел. В частности, ранее число π определялось как предел последовательности периметров $\{x_k\}$ вписанных правильных многоугольников. При этом отмечалась, что любое значение x_k является рациональным числом, причем с ростом номера k эти числа неограниченно сближаются между собой, то есть мы имеем дело с фундаментальной последовательностью. Но чем именно является этот предел и существует ли он вообще? Отметим, что сама последовательность $\{x_k\}$ реально существует и определена явным образом. Тогда почему бы в качестве произвольного действительного числа не выбрать просто какую-то фундаментальную последовательность рациональных чисел?

К сожалению, так поступать нельзя, поскольку различные последовательности могут ассоциироваться с одним и тем же действительным числом. В частности, число π можно получить и как предел соответствующей последовательности периметров $\{y_k\}$ описанных правильных многоугольников. Мы вновь имеем дела с фундаментальной последовательностью рациональных чисел, причем если первая последовательность является возрастающей, то вторая – убывающей. Однако и та и другая в равной степени может быть использована для нахождения числа π.

Следующий шаг уже понятен. На множестве фундаментальных последовательностей рациональных чисел вводится отношение эквивалентности так, что две такие последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ считаются эквивалентными, если величина $|x_k - y_k|$ стремится к нулю с ростом номера k, то есть элементы этих последовательностей неограниченно сближаются между собой. Теперь под множеством действительных чисел можно понимать соответствующее фактор-множество, элементами которого являются классы эквивалентных в указанном смысле последовательностей рациональных чисел.

Когда мы понимаем под длиной окружности предел последовательности периметров вписанных многоугольников, мы имеем в виду, что длину окружности можно с любой степенью точности приблизить периметрами многоугольников, то есть иррациональное число π можно сколь угодно точно аппроксимировать рациональными числами x_k. В этом и состоит смысл сходимости последовательности. Однако существует целый класс последовательностей указанного типа, которые в равной степени можно использовать для аппроксимации одного и того же действительного числа. Тем самым вновь конструктивное определение числового класса с помощью фактор-множества прекрасно согласует с практикой.

Итак, все рассмотренные типы чисел определяются как элементы некоторого фактор-множества какого-то конкретного ранее определенного семейства объектов с конкретным отношением эквивалентности.

Заключение

В целом из вышесказанного вытекает следующее.

I. Мы говорили о конструктивном определении основных числовых семейств. Однако описанные процедуры расширения числовых множеств (от натуральных чисел к целым и далее к рациональным, а от рациональных – к действительным) являются проявлением чрезвычайно важных математических конструкций, выходящих далеко за рамки теории чисел.

Итак, на множестве чисел, являющихся по своей природе мощностями (натуральные числа и нуль), определена ***операция*** сложения, то есть результат сложения двух таких чисел непременно дает число той же природы. Подобные объекты изучаются в рамках общей алгебры. Нетрудно убедиться, что здесь выполнены равенства $(x + y) + z = x + (y + z)$ и $x + y = y + x$ для любых чисел x, y и z, что соответствует свойствам ассоциативности и коммутативности. А еще любое число x удовлетворяет равенству $x + 0 = x$, что означает, что 0 является здесь единичным элементом. С алгебраической точки зрения множество с операцией, обладающей указанным набором свойств, называется ***коммутативным моноидом***. Отметим, что на более широком множестве целых чисел с той же операцией помимо всего этого для любого элемента

x найдется такое целое число $-x$ (обратный элемент), что выполнено равенство $x + (-x) = 0$. Множество с полученным в результате набором свойств (в данном случае совокупность всех целых чисел с операцией сложения) называется ***абелевой группой***. Все коммутативные моноиды разбиваются на два класса: одни являются абелевыми группами, а другие нет.

И тут оказывается, что любой коммутативный моноид можно расширить до абелевой группы указанным ранее способом. Действительно, пусть имеется произвольное множество X с операцией $\bullet$, являющееся коммутативным моноидом. Под расширенным множеством понимаются всевозможные решения x уравнения $x \bullet a = b$, где a и b представляют собой произвольные элементы исходного множества X. Понятно, что это решение определяется парой (a, b). Однако, как мы уже убедились, различные пары параметров могут определять одно и то же решение. Во избежание неоднозначности полагаем две такие пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) эквивалентными при выполнении равенства $a_1 \bullet b_2 = a_2 \bullet b_1$. Теперь в качестве Y можно выбрать соответствующее фактор-множество. Нетрудно убедиться, что при естественном распространении данной операции на Y получается абелева группа, которую называют ***группой Гротендика***, соответствующей данному моноиду. В частности, множество ненулевых целых чисел с операцией умножения является коммутативным моноидом, а его группой Гротендика как раз и оказывается множество всевозможных рациональных чисел.

II. Переход от рациональных чисел к действительным уже не связан с алгеброй, но тоже допускает обобщение. Мы имели дело с последовательностями $\{x_k\}$ рациональных чисел, причем речь шла о близости элементов этой последовательности между собой и с элементами других последовательностей. Произвольное множество X, в котором допускается оценка степени близости его произвольных элементов x и y с помощью некоторого неотрицательного числа $\rho(x, y)$, называется ***метрическим пространством*** с метрикой ρ. В частности, рациональные числа образуют метрическое пространство с метрикой, характеризуемой равенством $\rho(x, y) = |x - y|$, выражающем естественное расстояние между соответствующими точками на рациональной прямой. При этом последовательность $\{x_k\}$ метрического пространства сходится к некоторому элементу x множества X, называемому ***пределом***, если число $\rho(x_k, x)$ стремится к нулю с ростом k, то есть элементы последовательности постепенно приближаются к пределу.

На практике часто возникает ситуация, когда в нашем распоряжении имеется только сама последовательность, но не ее предел. Более того, зачастую мы не можем быть уверены даже в том, что этот предел существует. Тогда установить сходимость последовательности на основе определения предела не удастся. Вместе с тем можно проверить, сближаются ли элементы последовательности между собой, то есть будет ли стремиться к нулю величина $\rho(x_k, x_n)$ с ростом номеров k и n. Если да, то последовательность называется фундаментальной. В частности, таковыми являются на множестве рациональных чисел рассмотренные последовательности периметров, вписанных и описанных в круг многоугольников. Было бы заманчиво, установив фундаментальность последовательности, гарантировать ее сходимость, что соответствует ***критерию Коши***. Так вот, все метрические пространства делятся на два класса, в одном из которых критерий Коши работает, а в другом – нет. Пространства первого класса называются ***полными***, а второго – неполными. В частности, множество действительных чисел с естественной метрикой (модуль разности двух чисел) является полным пространством, а множество рациональных чисел с той же метрикой – неполным: число π не является рациональным, хотя и ассоциируется с фундаментальной последовательностью рациональных чисел (периметров). При этом оказывается, что любое неполное метрическое пространство можно расширить до полного, называемого его ***пополнением***, так, что любой элемент пополнения Y может сколь угодно точно аппроксимироваться элементами исходного множества X.

Построение пополнения осуществляется по знакомой схеме. Произвольный элемент пополнения характеризуется фундаментальной последовательностью элементов исходного множества. Однако, как нам известно, может оказаться, что разные последовательности соответствуют одному и тому же определяемому элементу. Во избежание неоднозначности на множестве таких последовательностей вводится эквивалентность так, что последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ считаются эквивалентными, если величина $\rho(x_k, y_k)$ стремится к нулю с ростом номера k, то есть элементы последовательностей неограниченно сближаются. В качестве искомого множества Y выбирается соответствующее фактор-множество. Можно убедиться, что, распространив естественным образом на это множество метрику исходного множества, мы действительно получаем его пополнение. В частности, пополнением пространства рациональных чисел как раз и будет пространство действительных чисел.

III. Таким образом, в рассмотренных выше случаях обобщений мы как будто применяли принципиально различный аппарат – алгебраический в первом случае и метрический во втором. Но в методе исследования явно просматривается что-то общее. И здесь и там мы имели дело с какими-то объектами (моноид, но, вообще говоря, не группа; метрическое пространство, но, вообще говоря, не полное), где интересующее нас свойство может нарушаться (на имеющемся множестве уравнение может не иметь решения, а фундаментальная последовательность может не иметь предела). Переходя к соответствующим фактор-множествам, мы расширяем исходное множество (строим группу Гротендика и пополнение метрического пространства) так, что на расширенном множестве желаемый результат выполняется (уравнение приобретает решение, а последовательность – предел).

В математике не принято говорить, что какая-то задача не имеет решения вообще. Она может не иметь решения на каком-то множестве, а если мы расширяем должным образом это множество, то решение там может появиться. По отношению к первоначальной постановке задачи полученный результат можно интерпретировать как ее ***обобщенное решение*** (у нас – обобщенное решение уравнения и обобщенный предел последовательности). Приведенные рассуждения наводят на мысль о том, что должен существовать какой-то математический аппарат, частными случаями которого оказываются как построение группы Гротендика (а значит, определение целых и рациональных чисел), так и построение пополнения метрического пространства (а значит, определение действительных чисел).

Немногим менее ста лет назад были заложены основы теории категорий, ставшей в определенной степени теорией математических теорий. Совокупность каких-либо однотипных математических объектов с преобразованиями одних объектов данного типа к другим объектам того же типа определяет ***категорию***. В частности, коммутативные моноиды, абелевы группы, общие метрические пространства и полные метрические пространства действительно образуют категории.

Существуют категории более сильные и более слабые. Более сильная категория характеризуется объектами, обладающими более богатыми свойствами. В более слабой категории объекты не столь богаты свойствами, но зато таких объектов существенно больше. В частности, категория групп богаче категории моноидов (в них любой элемент обратим, что нехарактерно для моноидов общего вида), зато категория моноидов шире (существуют моноиды, не являющиеся группами). Аналогично категория полных метрических пространств богаче категории метрических пространств общего вида (в них критерий Коши всегда работает), однако категория общих метрических пространств шире (существуют метрические пространства, в которых критерий Коши может нарушаться).

Переходы от одной категории к другой описываются с помощью некоторых специфических преобразований, называемых ***функторами***. Достаточно просто описываются переходы от более сильных категорий к более слабым. Это реализуется с помощью так называемых ***забывающих функторов***. Мы просто игнорируем какую-то часть свойств, характерных для исходной категории. В частности, для перехода от группы к моноиду достаточно просто не принимать во внимание существование обратных элементов, а для перехода от полного метрического пространства к пространству общего вида достаточно просто не интересоваться справедливостью критерия Коши. Существенно более важной и невообразимо более сложной проблемой является переход от более слабой категории к более сильной, связанной с наделением объектов исходной категории какими-то дополнительными свойствами, ранее им не присущими. Функторы, описывающие подобные переходы, называются ***свободными***. К их числу как раз и относятся построение групп Гротендика и пополнение метрических пространств, фактически дающие конструктивное определение рассмотренных классов чисел.

Свободные функторы встречаются в различных разделах математики и относятся к числу наиболее важных математических конструкций. Однако понять их природу можно в процессе конструктивного определения различных классов чисел.

Литература

1. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. Москва : Издательство московской литературы, 1963.
2. *Бурбаки Н.* Теория множеств. Москва : Мир, 1965.
3. *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть I. Москва : МЦНМО, 2002.

4. *Ленг С.* Алгебра. Москва : Наука, 1965.
5. *Маклейн С.* Категории для работающего математика. Москва : Физматлит, 2004.
6. *Рид М., Саймон Б.* Функциональный анализ. Москва : Мир, 1977.
7. *Серовайский С. Я.* История математики : эволюция математических идей : в 3 книгах. Москва : УРСС, 2019.
8. *Serovajsky S.* Architecture of Mathematics. Boca Raton, London, New York : Chapman and Hall/CRC Press, 2020.
9. *Serovajsky S.* The Logical Structure of Mathematics. Boca Raton, London : Chapman and Hall/CRC Press, 2026 (to appear).

QUOTIENT SET AS A MEANS OF CONSTRUCTIVE DETERMINATION OF NUMBER CLASSES

S.Ya. Serovaisky

al-Farabi Kazakh National University
71 al-Farabiav, Almaty, 050040, Kazakhstan

Abstract. A constructive definition of natural, integer, rational, and real numbers is given, based on the concept of a quotient set. It is shown that generalizations of these constructions are procedures for constructing a Grothendieck group and completion of metric spaces, which in turn out to be special cases of some free functors.

Keywords: numbers, quotient set, Grothendieck group, metric space, free functor