DOI: 10.22363/2224-7580-2024-2-35-51
EDN: ZELMZW

«НЕСТАНДАРТНЫЙ» ФОРМАЛИЗМ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ II: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ВРАЩЕНИЯ, ПОРЯДКОВАЯ ПАРАДИГМА

С.А. Векшенов

Российская академия образования
Российская Федерация, 119121, Москва, ул. Погодинская, д. 8

Аннотация. Данная статья является второй из серии «нестандартного» формализма квантовой теории. В ней развивается теоретико-множественная парадигма, обосновывается понятие фундаментального вращения, которое на интуитивном уровне было введено в первой статье серии. Показывается, что фундаментальное вращение является носителем порядковой бесконечности. Доказывается ряд теорем о соотношении носителей порядковой и количественной бесконечностей. В частности, формулируются условия, при которых носитель бесконечности является множеством. Показывается, что для теоретико-множественного континуума $S(N)$ это условие не выполняется, и, следовательно, $S(N)$, вопреки желанию Г. Кантора, не является множеством.

Данная статья является продолжением (второй частью) статьи, первая часть которой опубликована в журнале «Метафизика» (2023, № 2) и включает положения теоретико-множественной парадигмы. В третьей части, планируемой к опубликованию, формулируется и развивается порядковая парадигма.

Ключевые слова: фундаментальное вращение, порядковая парадигма, порядковая бесконечность, континуум

Введение

Ключевым понятием нестандартного формализма квантовой теории является понятие фундаментального вращения. Вернемся еще раз к контексту возникновения этого понятия.

Основой классического формализма квантовой механики, как известно, является постулат де Бройля, который, по выражению А. Эйнштейна, «поднял полог великого занавеса». Классическая формулировка этого постулата о дуализме волны и частицы известна. Однако мало кто обращал внимание, что в формулировке этого постулата присутствует понятие «фиктивной волны» (*onde fictive*), которое представляет собой совершенно особую абстракцию. Сравнительно недавно на это обратил внимание А.П. Ефремов, который отметил, что «фиктивная» волна, с точки зрения де Бройля, не переносит энергию, но представляет собой определенное проявление периодического процесса, происходящего «внутри» рассматриваемой частицы.

Этот периодический процесс может быть реализован по-разному:

- в рамках непрерывной среды, что приводит собственно к «фиктивной волне», которая не переносит энергию, но для неё выполняется принцип суперпозиции, который, строго говоря, является постулатом;
- в виде столь же «фиктивного», не физического, вращения, которое осуществляется вне какой-либо среды; единственными характеристиками такого вращения являются направление и период.

Дальнейшее развитие квантовой теории, как известно, пошло по первому пути.

Фиктивная волна $\psi(t)$ заменялась вектором состояния $\psi(t)\rangle$, принадлежащим гильбертову пространству H. Это позволяет развить операторный формализм с переходом к более абстрактной C^*-алгебре. Логика развития квантовой механики при таком подходе вела к уравнениям и группам Ли, преимущественно группам вращений. Естественным методологическим ходом явился переход от групп Ли к алгебрам Ли.

Операторный формализм позволил извлечь из основополагающей идеи де Бройля очень много практически значимой информации, но мало приблизил к пониманию сути квантовой теории. Это создало почву для поиска более глубоких онтологических основ этой теории и соответствующих им формализмов. Список авторов, предложивших различные онтологические концепции, достаточно велик: В. Гейзенберг, В. Паули, К. Вайцзеккер, Р. Пенроуз, Ю.С. Владимиров, В.В. Варламов, А.П. Ефремов и др. [5]. В их построениях были реализованы самые различные подходы, но при этом обнаружилось и устойчивое пересечение: все эти подходы, так или иначе, опирались на понятие спинора.

Посмотрим на него более внимательно.

Простейшим контекстом возникновения спинора является многозначность, свойственная функциям комплексного переменного, в частности, функции $z = \sqrt{w}$. Риманова поверхность этой функции дает трактовку спинорного объекта как объекта с периодом 4π.

Проявление «спинорности» возникает и в более содержательных ситуациях.

Как известно, трехмерное пространство Лобачевского L^3 можно рассматривать как абсолют (множество бесконечно удаленных точек) четырехмерного пространства Минковского M^4. При этом электромагнитному вектору в M^4 соответствует винт (фактически спинор) в пространстве L^3. На этот факт обратил внимание А.П. Котельников еще в 1926 г. [10]. Эта работа прошла совершенно не замеченной, хотя из нее можно было сделать далеко идущие выводы (абсолют пространства Лобачевского L^3 гомеоморфен сфере Римана, все вместе взятое ведет к конструкции, близкой к конструкции Р. Пенроуза). Строгое определение спинора можно дать, например, в рамках алгебры Клиффорда как элемента ее минимального левого идеала.

Понятие спинора прямо или косвенно опирается на понятие комплексного числа. Для развития операторного формализма этот факт является чисто техническим. Однако использование комплексных чисел как онтологической основы квантовой теории порождает существенные коллизии.

Поле комплексных чисел является расширением поля действительных чисел, которые, в свою очередь, являются абстракцией от макроскопических измерений. Фиктивная волна де Бройля, которая представляется комплексным вектором, распространяется в непрерывной среде, которая также описывается действительными числами. Следовательно, квантовая теория, основанная на операторном формализме, на самом фундаментальном уровне явно опирается на идею непрерывного. Погружение с этом балластом в глубины микромира, где *a'priori* нет ни геометрии, ни множеств неизбежно приведет к трансформации логических коллизий в содержательные. Проблемы Стандартной модели являются одной из иллюстраций такой трансформации.

Очевидно, что онтологические основы теории должны быть в максимальной степени свободны от любых априорных утверждений. Идеальный пример – теория множеств, где на основе совершенно общего понятия множества и отношения принадлежности была построена практически вся математика. Разумеется, противоречия и коллизии будут в любом построении: «Как уст румяных без улыбки, без грамматической ошибки я русской речи не люблю…». Преодолевая одни коллизии, мы неизбежно создаем новые, в тот момент еще не осознанные. Промежуток между «преодолением» и «осознанием» и создает эффект продвижения.

Всё сказанное выше делает осмысленным обращения ко второй из названных выше возможностей реализации основополагающей идеи де Бройля: через не физическое, «фиктивное» вращение, которое названо «фундаментальным» вращением (ФВ).

Фундаментальное вращение – это вращение в отсутствии среды, но в нем сконцентрировано представление обо всех периодических процессах, протекающих в любых средах. Можно сказать, что это некий аналог ручных часов, по которым можно следить за течением времени по всему пространству (релятивистские эффекты в данном контексте не обсуждаются).

Характеристикой ФВ является его направление и период. Более того, можно сказать, что само фундаментальное вращение и есть период как таковой (здесь можно увидеть применение известного в математике «принципа отчуждения», когда свойство становится объектом). Принципиально важной характеристикой ФВ является направление по часовой стрелке или против часовой стрелки. Таким образом, фундаментальное вращение является простейшим *бинарным* объектом. Выявление онтологической сущности таких объектов можно проследить в работах и дискуссиях В. Гейзенберга, В. Паули и К. Вайцзеккера. В конечном итоге это вылилось в концепцию *Uralternativen* сформулированную К. Вайцзеккером, преимущественно, на философском уровне [12].

Понятие фундаментального вращения можно отнести к конкретной реализации *Uralternativen.* В этом качестве ФВ крайне многопланово. В частности:

- фундаментальное вращение ↻ можно рассматривать как прообраз экспоненциальной формы комплексного числа $re^{i\varphi}$ при $r = 1$;
- из двух ФВ ↻ и ↺ можно «склеить» фундаментальное вращение ↻↺, которое можно рассматривать как прообраз спинора (аналогично как пара волновых векторов определяет двухкомпонентный спинор);
- из фундаментальных вращений противоположной направленности ↻ и ↺ может быть построена модель действительных чисел Конвея, любая последовательность фундаментальных вращений определяет действительное число, в частности ↻↺ ~ ½;
- используя соотношение Бора – Зомерфельда $\oint pdq = \hbar$, можно соотнести ↻ с постоянной Планка $\hbar$.

ФВ является простым и полезным инструментом построения мультиплетов в контексте представления групп вращения. Более подробно об этом было сказано в 1-й части «Нестандартного формализма».

Следует отметить, что для концепции *Uralternativen* можно найти и другие реализации. Например, в работе Д.Д. Иваненко, Г.А. Сарданашвили 1981 г. [7] было определено понятие «преспинора» как бинарного объекта, инвариантного относительно простейшей группы отражений $\boldsymbol{Z}_2 = (1, s{:}\ s^2 = 1)$. Поскольку преспиноры можно было рассматривать как генераторы группы Коксетера, это позволяло реализовать традиционную для данной области логику: к мультиплетам через представление группы.

В нашем подходе ключевую роль играет понятие фундаментального вращения, которое является носителем бинарности. Кроме того, оно обладает рядом принципиально важных свойств, позволяющих, в частности, строить мультиплеты наиболее прямым способом – как комбинации фундаментальных вращений.

Осталось ответить на главный вопрос: что представляет собой фундаментальное вращение как математическое понятие? Разумеется, можно оставаться в рамках интуитивных представлений о ФВ и двигаться дальше. Однако при этом есть опасность подмены ФВ одним из понятий теоретико-множественного пантеона, что сведёт на нет всё построение.

Такой разворот более чем реален.

Согласно сложившейся в XX в. методологии, любую возникшую абстракцию необходимо подвести под какую-либо теоретико-множественную структуру или обрисовать связи с этой структурой. Эту особенность теоретико-множественной математики очень ярко описал выдающийся чешский математик П. Вопенка: «Все математические объекты… могут быть построены как структуры в теории множеств. Точнее, эти объекты можно задать в теории множеств их каноническими моделями так, что изучение оригинальных объектов заменялось изучением соответствующих моделей. Теория множеств открыла путь к изучению необъятного количества различных структур и беспрецедентному росту знаний относительно них… Все структуры, изученные в математике, априори жестко заданы, и роль математика есть просто роль наблюдателя их описывающего…» [6].

Фундаментальное вращение представляет собой абстракцию, в которой заключено внутреннее движение. Очевидно, что подобрать или создать статическую теоретико-множественную структуру, адекватно представляющую эту абстракцию, принципиально ***невозможно.*** В этой связи создание адекватной математической модели названной абстракции требует самого радикального, со времен создания теории множеств Г. Кантором, осмысления оснований математики.

Разумеется, речь идет не только об этой – в целом – частной проблеме. Теоретико-множественная парадигма сформировала специфический взгляд на реальность. Её главной особенностью является отсутствие идеи длительности, которая заменяется теоретико-множественными конструкциями. Простейший пример – упорядоченное множество, которое является простейшей моделью времени. Пространство-время Минковского также является теоретико-множественной структурой, в которой время «подверстано» под пространство, что имеет очевидные технические достоинства, однако его физическое содержание весьма проблемно.

Список подобных структур можно множить и множить. Вопрос о том, насколько эти структуры соответствуют «порядку вещей», не корректен, так как он относится к самой теоретико-множественной парадигме и ее взаимоотношению с реальностью в любом ее понимании.

На данный момент эта парадигма, несомненно, доминирует и видится практически абсолютной. Однако смена парадигмы, как справедливо утверждает Т. Кун, заложена в ее природе. Очертив круг задач, оно одновременно высвечивает границу своих возможностей. Рано или поздно эта граница будет преодолена и начнет формироваться альтернативная концепция. Оформление этой концепции в полноценную парадигму может затянуться на годы, что не меняет положение дел.

Одновременно можно констатировать, что, несмотря на исключительное положение в математике, теоретико-множественный аппарат достиг своего «потолка». Теоретико-множественные конструкции, прежде всего теоретико-групповые, становятся все более изощренными и все менее эффективными, их возможности практически исчерпаны. Таким образом, вопрос об альтернативной парадигме и, соответственно, альтернативном математическом аппарате становится все более острым. Разумеется, эта парадигма не может быть создана искусственно – «в пику» сложившимся теоретико-множественным представлениям. Ее оформление обусловлено внутренней логикой самой математики, и к этой логике стоит прислушаться

Таким образом, осмысление постулата де Бройля, а следовательно, всего операторного формализма квантовой теории с неизбежностью ведет к осмыслению теоретико-множественной концепции в целом и выработке более общей теории, включающей теорию множеств Кантора.

Начала этой теории представлены в настоящей работе. Тезисно сформулируем изложенные далее положения.

1. Фундаментальным фактом математики является двойственная природа числа: оно является единством количественной и порядковой составляющих.

Например, число «семь» – это обозначение семи предметов или «седьмого» предмета в некотором пересчете. Парадоксальный факт состоит в том, что современная математика, идейно оформившаяся в конце XIX в., берет за основу исключительно количественную составляющую числа. Прямым следствием этого выбора стало оформление теории множеств, которая, в свою очередь, стала базой для создания теоретико-множественных моделей – разнообразных структур множеств, важнейшей из которых является группа. Таким образом, ключевое для современной физики понятие группы «завязано» на теоретико-множественную парадигму. Ключевым фактором действенности теоретико-множественной парадигмы является актуальная (завершенная) бесконечность, которая в рамках названной парадигмы неизбежно носит количественный характер. Соответственно, множество выступает носителем этой бесконечности.

2. Альтернативой названной парадигме является порядковая парадигма, которая отдает предпочтение порядковой составляющей числа. При этом в полной мере реализовывается принцип дополнительности: названные альтернативы не противоречат, а дополняют друг друга Ключевым моментом данной парадигмы является введение порядковой бесконечности Ω и установление принципиально важного неравенства: для любого λ $\mathbf{\Omega} > \aleph_\lambda$, *где* $\aleph_\lambda$ – кардинальное число, реализующее количественную бесконечность. Данное соотношение говорит о том, что *порядковых чисел больше, чем количественных.* В метафизическом плане это означает, что сосчитываемых объектов меньше, чем объектов нумеруемых. Таким образом, существует объект, про который можно сказать, что он «n-й» в некотором пересчете, но про который нельзя сказать, что он имеет n элементов (это все равно, что можно сказать «второй», но нельзя сказать «два»). Принимая также во внимание известные философские традиции связывать количество с пространством, а бесконечность со временем, можно заключить, что *бесконечность пространства меньше, чем бесконечность времени*.

Принципиальный факт: ***носителем порядковой бесконечности* Ω *является фундаментальное вращение!***

3. Порядковая бесконечность **Ω (**фундаментальное вращение ↻) по отношению к теоретико-множественному универсуму занимает то же место, что и бесконечно удаленная точка по отношению к евклидовому пространству. Совокупность бесконечно удаленных точек образует абсолют, который является вполне конкретным объектом. Абсолютом теоретико-множественного универсума $\boldsymbol{U}$ является континуум, построенный из простейших фундаментальных вращений. Поскольку каждое ФВ можно соотнести с постоянной Планка (см. статью I данной серии), можно утверждать, что абсолютом $\boldsymbol{U}$ является континуум, в котором единицей измерения выступает постоянная Планка $\hbar$. Этот удивительный факт заслуживает самого серьезного анализа.

4. Введение бесконечности Ω позволяет развить единую теорию бесконечности как теорию **о** свойствах бесконечных объектов как результатов стабилизации процесса $\boldsymbol{\gamma}$ относительно предикатов T_i и о свойствах носителей этих бесконечностей. Принципиальное значение имеют следующие теоремы:

- *теорема 1.* Для того чтобы из процесса γ можно было бы выделить множество, необходимо, чтобы его шаги различались, по крайней мере, двумя предикатами, T_Z *(порядка)* и T_R *(количества)*;
- *теорема 2.* Если шаги процесса γ различимы предикатом T_R и если из условия, что шаги x и y различимы предикатом T_R, следует, что они различимы и предикатом T_Z, и, наоборот, если они различимы T_Z, то они различимы и T_R, то есть $T_R \sim T_Z$. В этом случае процесс γ эквивалентен натуральному ряду.

5. Из теоремы *1* вытекает, что элементы теоретико-множественного континуума *S(N)* различимы только одним предикатом (следствие аксиомы выбора), и, следовательно, континуум *не является* множеством. Это дает окончательное решение континуум-проблемы Кантора. Прямая конструкция такого континуума будет представлена в 3-й части «Нестандартного формализма».

1. От теории множеств к единой теории бесконечного

Теория множеств – общепринятый язык или общепринятая онтология современной математики. Эти качества столь просты и естественны, что сама математика видится воплощением носителя этих качеств – теории множеств. Однако это далеко не так. Теория множеств – это мощная, влиятельная, но все же только парадигма математики. Не единственно возможная. Если в современной физике можно выделить геометрическую, полевую и реляционную парадигмы, то в математике также можно констатировать по крайней мере две парадигмы. Одной из них как раз и является теоретико-множественная парадигма.

1.1. Теоретико-множественная парадигма

Теория множеств была создана Г. Кантором в промежутке между 1874 и 1896 гг. Активным, но не всегда обозначенным соавтором этой теории (Кантор называл ее *Mengenlehre* – «Учение о множествах») был Р. Дедекинд. Немного раньше и совершенно самостоятельно основные идеи этой теории были сформулированы Б. Больцано.

Свехзадачей Г. Кантора была расширение натурального ряда *1,2,3, ..., n* в область трансфинитного. Теоретико-множественная идеология возникла и оформилась в процессе решения именно этой задачи.

Проследим, как это произошло.

Рассмотрим для начала оригинальную схему Г. Кантора, представленную в его классическом труде *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehe. Leipzig. 1883.*

Воспроизведем фрагмент этой работы по русскому переводу.

«Ряд положительных натуральных чисел *1*, *2*, ..., *n* имеет источником своего возникновения повторное введение и объединение единиц, положенных в основу и рассматриваемых как равные. Число *n* есть выражение как определенного количества, так и соединения рассматриваемых единиц в одно целое. Таким образом, образование конечных целых чисел основывается на принципе присоединения единицы к некоторому имеющемуся, уже образованному числу... Назовем это первым принципом порождения.

С другой стороны, нет ничего нелепого в том, чтобы вообразить себе некоторое новое число, обозначим его **ω**, которое должно быть выражением того, что нам дана согласно своему закону в своей естественной последовательности вся совокупность *1*, *2*, *3*, ..., *n*, ... (подобно тому, как *n* служит выражением того, что известное конечное число единиц соединено в одно целое). Можно даже вообразить число **ω** *пределом* (выделено нами. – *С.В.*), к которому стремятся числа *n*, если понимать под этим лишь то, что **ω** должно быть первым целым числом, которое следует за всеми числами *n*, ... Это второй принцип порождения.

Допуская за введением числа **ω** следование дальнейших присоединений единицы, мы получим с помощью первого принципа порождения числа: **ω** +*1*, **ω** +2, **...**, **ω** + *n*, ...

Так как мы при этом снова не приходим к наибольшему числу, то воображаем себе новое число, которое можно обозначить *2***ω.**

Если снова применить к числу *2***ω** первый принцип порождения, то мы приходим к продолжению: *2***ω** +*1*, *2***ω** + *2*, **...** , *2***ω** + *n,* **...** и т.д.» [8. С. 92].

Анализ этого фрагмента показывает, что Кантор изначально мыслил натуральное число, состоящее из конечного числа различимых частей. Это позволяет ему естественно перейти к числу **ω**, состоящему из бесконечного числа частей. Такая точка зрения вполне оправданна, но она не является обязательной. Дело в том, что число изначально мыслилось как нечто *неделимое*, а возможность его разбиения на части есть не более чем необходимая для Кантора гипотеза.

На целостное понимание числа (со ссылкой на неоплатоников) указывал, в частности, А.Ф. Лосев: «...необходимо отграничить число от количества. В чем разница между тем и другим? Наиболее ясным является здесь то, что количество является вторичным качеством по сравнению с числом... Когда говорят о пяти копейках, то «пять» в данном случае является количеством... Выражаясь точнее, количество предполагает переход числа в инобытие и применение числа для осязания (пересчета) этого количества. Число дано само по себе и является самостоятельным предметом мысли. Когда же речь идет о количестве, мы уже покинули число как таковое и перестаем созерцать его в его полной самостоятельности» [11. С. 94].

Замечание А.Ф. Лосева очень существенно – число не исчерпывается количеством, однако для Кантора принципиальным было именно количественное понимание числа, то есть каждое число (конечное или бесконечное) состоит из конечного или бесконечного числа частей. Это принципиальный момент всей теоретико-множественной парадигмы, позволяющий осуществить прорыв в бесконечное. Само же понятие множества возникает как носитель конечного или бесконечного количества: «*Unter einer Menge vestehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer*

Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen» – «Под множеством мы понимаем любое соединение *M* определенных различных (различимых) объектов нашего умозрения или нашей мысли (которые будут называться элементами *M*) в единое целое» [8].

Тонкость этого определения прячется в слове *wohlunterschiedenen,* которое Кантор никак не поясняет ни в данном месте, ни в дальнейшем. Мы не будем акцентировать на этом внимание и будем понимать его прямолинейно, а именно как «различные» объекты нашего умозрения.

В свете вышесказанного представим схему Кантора с учетом всех скрытых в ней понятий и логических ходов.

Первый шаг заключается в фиксации в натуральном числе порядковой и количественной составляющих, например «семь» и «седьмой». «Семь» – это обозначение семи предметов, «седьмой» – это седьмой шаг в некотором пересчете.

Как уже говорилось выше, Кантор переводит эти «семь предметов» во внутренний план (мыслит абстрактными элементами) и делает их количественной составляющей числа «семь». Что касается порядковой составляющей числа, то она представляется «семью» упорядоченными элементами. Таким образом, конечное натуральное число, как единство «количества» и «порядка», может быть представлено множеством с определенными характеристиками.

Следующий шаг состоит в точном определении этих характеристик, которые позволили бы распространить понятие «количества» и «порядка» на бесконечные множества. Для этого Кантор вводит характеристики *Mäglichkeit* и *Abzahl*

Соответствующие определения выглядят следующим образом.

Mäglichkeit *oder* ***Cardinalzahl*** *von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Holfe unseres action Dennkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der abstrahirt wird».* («***Мощностью*** *или* ***кардинальным числом*** *множества M мы называем общее понятие, которое получается при помощи нашей активной мыслительной способности из M, когда мы абстрагируемся от качества его различных элементов m и от порядка из задания*») [9].

Если же с помощью «активной мыслительной способности» мы абстрагируется только от качеств элементов, но не от порядка их задания, то приходим к понятию порядкового типа или **ординального числа** (***Abzahl*)**

Как сравнивать между собой кардинальные и ординальные числа?

С ординальными числами все более-менее понятно. Добавление к упорядоченному множеству *M* нового элемента меняет множество. Поскольку этот элемент *следует* за всеми элементами *M*, можно перестроить порядок нового множества таким образом, что оно окажется упорядоченным. Таким образом, добавляя к упорядоченному множеству новый элемент, мы увеличиваем на единицу его ординальное число.

С кардинальным числом сложнее. Добавление к бесконечному множеству нового элемента не меняет его кардинального числа и нужно искать иной инструмент сравнения. В теории множеств таким инструментом является *1-1*-соответствие. Если оно есть – кардинальные числа совпадают, например, множества натуральных и счетных чисел. В действительности, речь идет о процедуре измерения (образно говоря, «прикладывания линейки» к множеству, что и подразумевает *1-1* соответствие). Разумеется, в этом случае кардинальное число определяется неоднозначно, в зависимости от присутствия или отсутствия такой «линейки» – *1-1*-соответствия. С точки зрения теории множеств *1-1*-соответствие также является множеством. Таким образом, кардинальное число, которое приписывается множеству, зависит от совокупности рассматриваемых множеств. Если в игру вступает аксиоматика, которая регулирует эту совокупность, при сохранении интуитивно приемлемых операций с множествами, то кардинальное число множества определяется как самой аксиоматикой, так и конструкциями в ее рамках.

Ситуация, когда инвариантным образом определяется некоторая сущность, величина которой зависит от способа измерения, вполне ординарна (например, длина непрерывной кривой как сущность, и как величина, определяемая некоторым интегралом). Определяя кардинальное число множества вышеназванным образом, как результат абстрагирования от качества составляющих его элементов, мы однозначным образом закрепляем за множеством определенное кардинальное число. Каким образом найти это число, «измерив» множество – это отдельная задача. Парадоксальным образом в современной теории множеств утвердилось определение кардинального числа именно как результата измерения. Конкретно кардинальное число – это как класс множеств, между которых установлено *1-1*-соответствие. Например, можно считать кардинальным числом «семь», то общее, что содержится в семи днях недели, семи холмах, семи цветах радуги, семи смертных грехах и т.д. В этой ситуации понятие равномощных множеств, предшествует понятию мощности (кардинального числа).

Фактически речь идет о двух возможностях.

1. Однозначно закрепить за данным множеством определенное количество, как объективную в рамках теории множеств реальность и анализировать возможные способы его измерения (которые в принципе можно и не найти). В отношении континуума эту точку зрения высказал в 20-х гг. XX в. Н.Н. Лузин: «Мощность continuum'а, если только мыслить его как множество точек, есть некая единая реальность и она должна находиться на алефической шкале, где она есть; нужды нет, если определение этого места затруднительно или как прибавил бы *J. Hadamard*, «даже невозможно для нас, людей» [2].

2. Дать простор аксиоматике и ее различным моделям, в которых имеются «свои» кардинальные числа для данного множества. С позиций аксиоматики позиция Лузина воспринималась и воспринимается как некая «инерция воображения», не признающая, что «отрезок [0,1] не Богом создан, а придуман человеком, причем стоит на некоторых посылках» [2]. Разумеется, это очень слабый аргумент, поскольку при любых посылах, сама идея множества остается неизменной.

Выбор одной из возможностей определяется общим философским и методологическим контекстом. Первый случай – классический вариант «жесткой» онтологии, во втором случае – мир определялся границами языка: «*Die Welt ist die Gesamtheit der Tatsachen, nicht der Dingen»* (Мир – совокупность фактов, а не предметов) [4]. Именно эта точка зрения доминировала в XX в.

Вернемся к основной линии и посмотрим более внимательно на оригинальную конструкцию Кантора.

В случае конечных множеств кардинальные и ординальные числа совпадают, что отражает интуицию совпадения в натуральном числе количественной и порядковой составляющих.

Соберем все натуральные числа в одно целое. С точки зрения множеств эта операция ничем не отличается от образования конечного числа n из n элементов. Обозначим это число через $\boldsymbol{\omega}$, разумеется, $\boldsymbol{\omega}$ – упорядоченное множество. Число $\boldsymbol{\omega}$ в количественном и порядковом смысле больше любого натурального числа n. Пойдем дальше и образуем число $\boldsymbol{\omega}+1$ – добавление к множеству $\boldsymbol{\omega}$ еще одного элемента, который следует за всеми элементами $\boldsymbol{\omega}$. Это новое упорядоченное множество, значит, в смысле порядка $\boldsymbol{\omega}+1 \neq \boldsymbol{\omega}$. Есть тонкость: $1+\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}$ – мы добавили один элемент до того, как объединили все элементы в одно целое, и этот элемент «растворился» в бесконечном множестве. Разумеется, почти каждый шаг в этом построении можно подвергнуть сомнению и критике, но гениальность Кантора в том и состояла, что он двигался вперед вопреки привычному страху бесконечного (*horror infinity*).

Из неравенства $\boldsymbol{\omega}+1 \neq \boldsymbol{\omega}$ следует, что число ω можно рассматривать как «новый ноль» и развернуть ряд $\boldsymbol{\omega}+1$, $\boldsymbol{\omega}+2$, $\boldsymbol{\omega}+3$…, собрать полученные числа в множество $2\boldsymbol{\omega}$, которое снова можно рассматривать как «новый ноль» и т.д. Процесс построения порядковых чисел можно продолжать неограниченно: прибавляя 1 и объединяя в бесконечные множества. Однако образовать множество, которое бы включало в себя все ординалы, невозможно – возникает парадокс Бурали – Форти.

Если в случае конечных натуральных чисел их количественная и порядковая составляющие совпадают, в трансфинитной сфере это не так. Действительно, $\omega+1 \neq \omega$ – это различные множества, которые имеют различные ординалы. Вместе с тем между элементами множеств ω и $\omega+1$ можно установить 1-1-соответствие. Это означает, что числа ω и $\omega+1$ равны в смысле количества, то есть ω и $\omega+1$ имеет одно и то же кардинальное число. Таким образом, в сфере трансфинитного зафиксировано расхождение между «количеством» и «порядком», а приведенная последовательность ординалов расширяет в область трансфинитного только порядковую составляющую натурального числа.

Чтобы продвинуться в решении сверхзадачи Кантора о расширении натурального ряда в область трансфинитного, необходимо найти способ конструирования множества с более высоким кардинальным числом, чем кардинальное число исходного множества. Тем самым будем «запущен» процесс наращивания количеств, без которого решение поставленной сверхзадачи невозможно.

Кантор нашел такой способ, но одновременно с ним возник целый «букет» проблем, которые трудно замести «под ковер».

Конструкция Кантора хорошо известна под именем «диагональный метод». Его законность, с точки зрения, логика была и остается предметом обсуждений (O. Bekker [1]). Тем не менее в рамках теоретико-множественной парадигмы этот метод принято считать корректным.

В общем виде он приводит к утверждению, что множество всех подмножеств $\boldsymbol{P}(X)$ данного множества X имеет кардинальное число строго больше, чем кардинальное число X.

Решает ли эта конструкция поставленную Кантором проблему? Ответ далеко не очевиден. В случае конечных чисел каждый шаг одновременно увеличивает и количество, и порядок. Однако, как было показано выше, конструкция, увеличивающая ординал, в общем случае не приводит к увеличению кардинала. Возникает вопрос: может ли вообще рассмотренная конструкция увеличения ординалов «дотянуться», например, до множества $\boldsymbol{P}(\omega)$? Если нет, то решение сверхзадачи Кантора становится как минимум проблемным.

Тем не менее выход был найден. Суть его состояла в следующем.

Если множество $\boldsymbol{P}(\omega)$ упорядоченно (более точно – вполне упорядоченно), то оно получает определенное место на шкале ординалов. Для Кантора этот факт был очевидным, Кёниг в 1904 г. подверг его сомнению, но Цермело в 1905 г. специальной аксиомой выбора возвел интуицию Кантора в ранг основополагающего утверждения. При этом упорядоченность $\boldsymbol{P}(\omega)$ носила абсолютно умозрительный и искусственный характер – множество просто предполагалось упорядоченным, без указания конкретного порядка (аксиома выбора). Подобное «раскрепощение» в конечном итоге и дало решение сверхзадачи Кантора. Что касается самой аксиомы выбора, то ее целесообразность (слово «законность» здесь не вполне корректно) стала предметом отдельного анализа.

Итоговая конструкция выглядит следующим образом.

Обобщая сказанное выше, можно утверждать, что множества имеют различные кардинальные числа, если между ними нельзя установить *1-1*-соответствие. Первый бесконечный ординал ω имеет кардинал, который отличается от кардиналов всех конечных чисел. Обозначим его $\aleph_0$, далее возьмем ординал $\aleph_1$, у которого нет *1-1*-соответствия с $\aleph_0$, ординал $\aleph_2$, у которого нет *1-1*-соответствия с $_1\aleph$ и т.д. Получается шкала алефов (кардинальная шкала), которая и является искомым расширением:

$$0,\ 1,\ 2 \ldots n,\ \ldots \aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2 \ldots \aleph_\lambda \ldots .$$

Естественный вопрос, который возникает немедленно после конструирования шкалы алефов заключается в том, каким образом соотносятся $\boldsymbol{P}(\omega)$ и $\aleph_\lambda$? После всего вышесказанного ответ предсказуем – это две существенно различные конструкции, без внутренней логической связи. Тем не менее сам Кантор полагал, что $\boldsymbol{P}(\omega) = {}_1\aleph$ (континуум-гипотеза, 1877 г.). Если бы эта гипотеза оказалась ложной, то возник бы следующий вопрос: каково λ, такое, что $\boldsymbol{P}(\omega) = \aleph_\lambda$? Осмысление проблемы континуума заняло весь XX в. (К. Гёдель, 1940 г.; П.Дж. Коэн, 1963). Конечный результат, по сути, ничего не добавил к интуитивно ясной ситуации: теория множеств ничего не может сказать о мощности континуума! О тонкостях проблемы континуума и ее «решения» в рамках теории множеств см. [3].

Для математики в целом континуум-проблема была идейно важной и исключительно сложной задачей. Однако основным результатом построений Кантора стал теоретико-множественный язык, своеобразная латынь современной математики, позволяющая предельно «раскрепостить» математическую мысль. «Сущность математики состоит в ее свободе» («*Das Wesen der Mathematik liegt grerade in ihrer Freiheit»*) – так выразил это стремление сам Кантор.

Количество трудов о теории множеств неисчислимо, и добавлять еще один обзор ее достижений и проблем вряд ли стоит. Однако имеет смысл дать представление о ней как о математической парадигме, что предполагает рассмотрение более широкого контекста в плане формирования альтернативной парадигмы.

Следует отметить, что теория множеств – это, прежде всего, теория актуально бесконечного, а множество выступает носителем этой бесконечности. Рассмотрение только конечных (и даже счетных) множеств резко сокращает возможности математики как теории, способной «заглянуть за горизонт» и делать предсказания.

Теория множеств демонстративно «отодвигается» от потенциальной бесконечности (неограниченного процесса), заменяя его множественными конструкциями. В частности, важнейшее для математики понятие предела в теории множеств заменяется понятием «фильтра» (А. Картан, В.И. Гливенко). Соответствующая конструкция выглядит следующим образом.

Будем называть фильтром любую систему непустых подмножеств $F = \{M\}$ множества V, обладающую тем свойством, что из того, что $M_1 \in F$ и $M_2 \in F$ следует, что существует M_0, такое, что $M_0 \in M_1 \cap M_2$.

Если функция $f(x)$ определена на V и принимает значения из топологического пространства T, то пределом $\lim f(x)$ по фильтру F называется такой элемент $y \in T$, что F для любой окрестности $U(y)$ найдется множество $M \in F$, на котором все значения $f(x)$ принадлежат $U(y)$.

Если V совпадает с множеством действительных чисел, то через $x \to \pm\infty$ обозначим фильтр F, состоящий из множеств M_h, соответствующий всем положительным h, таким, что $|x| > h$, тогда запись $\lim f(x)$ приобретает общепринятый в теории пределов смысл $x \to \pm\infty$.

Эта ординарная на данный момент конструкция тем не менее высвечивает все основные методологические ходы, характерные для теории множеств, а именно:

– замена потенциальной бесконечности (неограниченного процесса) актуальной бесконечностью, представленной множеством, собранным из отдельных шагов процесса. Это именно количественная бесконечность;

– процессуальность моделируется конструкцией, допускающей запись в логике предикатов (как правило, исключающей кванторы по предикатам), в данном случае: $M_1 \in F \,\&\, M_2 \in F \rightarrow \exists M_0, M_0 \in M_1 \cap M_2$.

– понятие фильтра универсально: в качестве множеств M могут выступать самые различные объекты, представленные множествами: числа, функции и пр., на все эти объекты распространяется семантика предельного перехода, в этом смысле понятие и свойства предела можно перенести, например, в область логики.

В целом же роль теории множеств в математике примерно такова.

На момент создания теории множеств в математике сформировался широкий спектр конкретных различных понятий и представлений. Универсальность теоретико-множественного языка позволила построить для них разноплановые множественные модели. Фактически вся математика была переведена на теоретико-множественный язык, что позволило сформировать более-менее единый методологический аппарат (традиционно его связывают с гёттингенской школой Э. Нётер, в которой центральными были понятия «группы» и «кольца»). С точки зрения Бурбаки, математика вообще есть совокупность этих структур, а ее целью является их изучение, обобщение и применение. Разумеется, это всего лишь точка зрения. Роль подобных структур в математике все же скромнее, хотя и очень значительная Теоретико-множественные модели (структуры) позволили проложить «мосты» между отдельными, мало похожими областями, например теорией пределов и логикой. Через эти мосты осуществляется семантический обмен, позволяющий, например, рассматривать формулы, которые являются «пределами» совокупности других формул с распространением на них всех свойств предельного перехода. Это позволяет не только очертить единый угол зрения на различные области, но и получать конкретные нетривиальные результаты. Подобные структуры – «мосты» хорошо управляются аксиоматикой. Варьируя аксиомами, можно получить целый спектр моделей, отражающих различные оттенки данного понятия. Впечатляющий пример – теория групп, в которой исследованы, кажется, все мыслимые аспекты симметрии.

При этом обнаружилась интересная закономерность. Многие – абстрактные – конструкции при определенных естественных условиях оказываются изоморфными конкретным математическим объектам. Приведем только начало достаточно длинного списка.

Теорема Кэли: «Всякая конечная группа изоморфна группе подстановок».

Теорема: «Любая замкнутая ориентируемая поверхность гомеоморфна сфере с g ручками для некоторого целого числа g».

Тезис Чёрча: «Всякое уточнение интуитивного понятия алгоритма изоморфно Машине Тьюринга (или рекурсивным функциям, или нормальным алгорифмам Маркова и т.д.)».

Теорема Гельфанда Наймарка: «Любая C*-алгебра изоморфна некоторой подалгебре в алгебре ограниченных линейных операторов в некотором гильбертовом пространстве».

Теорема Уитни: произвольное гладкое n-мерное многообразие со счетной базой допускает вложение в $2n$-мерное евклидово пространство и т.д.

Все эти примеры говорят о том что, несмотря на тяготение к универсальным структурам, идейное ядро математики вполне конкретно. Тем не менее именно универсальные структуры определяют основную методологию математики и ее связи с реальным миром.

Важен следующий момент. Теоретико-множественные модели, которые в периоде активного развития (приблизительно 20–50-е гг. XX в.) воспринимались как инструмент познания, постепенно стали превращаться в универсальные паттерны, под которые необходимо было подвести всякое явление природного или интеллектуального мира. Эта идея выплеснулась далеко за пределы теории множеств и стала основой в так называемом «информационном обществе». Методология этого периода становится предельно «заземленной»: создание структур на теоретико-множественной основе и подверстывание под них очередного феномена. На сегодняшний день можно констатировать, что эта идеология идейно и психологически себя исчерпала, а ее техническая составляющая все больше напоминает «игру в бисер».

Эту особенность теоретико-множественной математики очень ярко описал выдающийся чешский математик П. Вопенка, который сам внес существенный вклад в теорию множеств:

«Современная математика изучает конструкцию, отношение которой к реальному миру, по меньшей мере, проблематично. Более того, эта конструкция не единственно возможная, да и на самом деле не самая подходящая с точки зрения самой математики. Это ставит под вопрос роль математики как научного и полезного метода. Математика может быть низведена к простой игре, происходящей в некотором специфическом искусственном мире. Это не опасность для математики в будущем, а непосредственный кризис современной математики» [6].

Главная проблема состоит в том, что теоретико-множественная парадигма не в состоянии описать реальную ткань времени. Теория множеств предлагает лишь простейшую, крайне прямолинейную модель – упорядоченное множество, которая очень далека как от собственно идеи длительности, так и от всего корпуса концепций, связанных с интуицией времени, который сформировался начиная с Блаженного Августина. Теория множеств не видит принципиального различия между «шагом» процесса и «элементом» множества, хотя такое различие очевидно. Более того, желание «упрятать» время в теоретико-множественные модели оборачивается появлением парадоксов и структур с патологическими свойствами (например, неизмеримого множества), которые стали неотъемлемой частью теоретико-множественной математики.

Необходимость развития математики на основе интуиции времени была осознана давно. Наиболее последовательно эту линию, начиная с 1904 г., отстаивал Я.Э. Брауэр и его последователи. Объекты математики Брауэра всегда конструктивны и «осязаемы», что, несомненно, придает уверенности при работе с этими объектами. Вместе с тем именно благодаря возможности оперировать объектами, не предъявляя их, были получения многие выдающиеся результаты. В этом плане борьба за наглядность и интуитивную ясность была переведена в чисто идейную плоскость. Поле приложений, в частности, в физике микромира осталось за теорией множеств.

Несомненно, сила концепций, основанных на теории множеств, заключается в актуальной бесконечности, которая составляет, как уже неоднократно подчеркивалось, стержень теоретико-множественного мира. Очевидно, что потенциальная бесконечность Брауэра неконкурентоспособна по отношению к актуальной бесконечности Кантора. Однако роль времени явно не сводится к фону, который сопровождает теоретико-множественные построения. Чтобы изменить ситуацию и сделать время активным «игроком» на математическом поле, необходимо выйти в трансфинитную сферу, осмыслить и определить «бесконечность времени» как полноценного дополнения «бесконечности пространства», реализованной в теории множеств.

Здесь, разумеется, нужна конкретика. Понятие времени слишком подвижно и загадочно, чтобы положить его в основу строгой теории. По аналогии с теоретико-множественной концепции необходимо выделить понятие, генетически связанное с понятием времени, но имеющее точный математический смысл. Таким понятием является понятие «порядка». Развитием порядковой парадигмы мы и займемся в оставшейся части данной работы.

Литература

1. *Bekker O.* Grösse und Grenze der mathematischen Denkweise. Freiburg, 1959.
2. *Босс В.* Теория множеств: от Кантора до Коэна. М.: URSS, 2011.
3. *Векшенов С. А.* Свет и континуум – короткое замыкание // Метафизика. 2017. № 3 (25). С. 42–56.
4. *Witgenchtein L.* Logisch – philosophische Abhanglung (рус. перевод: Витгенштейн Л. Логико-философский трактат // Витгенштейн Л. Философские работы. Ч. I. М.: Гнозис. 1994).
5. *Владимиров Ю. С.* Метафизика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2002.
6. *Vopĕnka P.* Mathematics in the alternative set theory. Leipzig, 1979. (Русский перевод: П. Вопенка. Математика в альтернативной теории множеств. М.: Мир, 1983.)
7. *Ivanenko D., Sardanashvily G.* Preons as Prespinors // Доклады Болгарской академии наук. 1981. Т. 34, № 8. 1073–1074.
8. *Cantor G.* Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehe. Leipzig, 1883.
9. *Cantor G.* Mitteilungen zur Lehre vom Transfinitum (Русский перевод: Контор Г. К учению о трансфинитном // Труды по теории множеств. М., 1985.)
10. *Котельников А. П.* Принцип относительности и геометрия Лобачевского // In mem. Lobatschevskii. 1927. Т. 2. С. 37–66.
11. *Лосев А. Ф.* Логическая теория числа. М., 1994.
12. *Weizsäcker C. F.* Aufbau der Physik. München, 1985. 661 s.

THE "NON-STANDARD" FORMALISM OF QUANTUM THEORY II: FUNDAMENTAL ROTATIONS, THE ORDINAL PARADIGM

S.A. Vekshenov

Russian Academy of Education
8 Pogodinskaya St, Moscow, 119121, Russian Federation

Abstract. This article is the second article in the series of "non-standard" formalism of quantum theory. It develops the set-theoretic paradigm and substantiates the notion of fundamental rotation, which was introduced at the intuitive level in the first article of the series. It is shown that the fundamental rotation is a carrier of an ordinal infinity. We prove a number of theorems on the relation between the carriers of ordinal and quantitative infinity in particular, we formulate the condition under which the carrier of infinity is a set. It is shown that for the set-theoretic continuum $S(N)$ this condition is not fulfilled, and hence $S(N)$, contrary to G. Cantor's wish, is not a set. Due to the large amount of material, this article is the second part of the general article. It presents the key points of the set-theoretic paradigm, while the third part formulates and develops the ordinal paradigm.

Keywords: fundamental rotation, ordinal paradigm, ordinal infinity, continuum