ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МЕТАФИЗИКА

DOI: 10.22363/2224-7580-2024-2-8-18
EDN: ZAGHRY

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ НА МНОЖЕСТВЕ ОДНОМЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.П. Ефремов

Институт гравитации и космологии
Российского университета дружбы народов
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Аннотация. Показано, что ряд гиперкомплексных числовых множеств возникает в абстрактной среде, состоящей из случайно ориентированных одномерных геометрических объектов. Внимание сосредоточено на базовом множестве, представленном алгебраической системой типа группоида с одной бинарной операцией (ассоциативным умножением), допускающей делители нуля; для этого множества приведена оригинальная таблица умножения типа таблицы Кэли. Введение операции обратимого сложения расширяет набор до алгебр действительных, комплексных и гиперкомплексных чисел с единицами, построенными из исходных простых элементов. Отмечается, что эта фундаментальная математика тесно связана с происхождением основных уравнений квантовой физики.

Ключевые слова: алгебраическая система, бинарная операция, таблица Кэли, гиперкомплексные числа

Введение

Математизация описания физических процессов, инициированная Ньютоном и Лейбницем в XVII в., к удивлению физиков, опирающихся на эмпирические методы исследований, имела неожиданный эффект: через два столетия математика оказалась «необоснованно эффективной для использования ее в естественных науках» [1]. Примером тому послужили первые теории, базирующиеся пока еще на результатах физического опыта: «необъяснимая» (со времен Мопертюи) аналитическая механика, электродинамика Максвелла и статистическая физика Гиббса. Следующий этап развития в рамках новой синтетической науки – теоретической физики – можно характеризовать как уже чисто математическую эмпирику, то есть попытку установления закономерностей при анализе не собственно физических объектов и явлений, а математических соотношений, предлагаемых для более или менее точного их описания. Наиболее удачные примеры – теория относительности, квантовая механика и теория элементарных частиц. Впрочем, некоторые из этих находок появились в результате эвристического моделирования, как это было с уравнением Шредингера, которое, как утверждают учебники, никак не выводится из логических соображений [2].

При этом, однако, сделанные на базе этого уравнения расчеты эффектов микромира, подтвержденные экспериментально, вызывают искреннее удивление и заставляют сомневаться в верности действующих представлений о фундаментальных структурах физического мира. В силу известной ограниченности прямого эксперимента в среде объектов с характерным размером $10^{-15}\,cm$ осмысление «физического устройства» такой среды, как представляется, может идти по двум каналам: (i) идеалистическое моделирование с использованием словесного описания и (ii) строго математическое моделирование с использованием, по возможности, геометрических – или подобных – образов, позволяющих дать визуальное представление об описываемом объекте или явлении.

Типичным примером первого варианта такого осмысления является модель Дж. Уилера так называемой предгеометрии как «среды обитания» квантово-механических объектов; эта среда описывается как некий базисный элемент физического пространства, однако при этом «…a concept of pre-geometry breaks loose all mention of geometry and distance» [3].

Пример второго пути [вариант (ii)] представлен в данной работе. В известном смысле этот путь развивает идеи Уилера, но на строго математической основе, предусматривающей взаимосвязь между допускающими визуализацию геометроподобными идеальными объектами и числами, принадлежащими исключительным алгебраическим системам.

Предлагаемое исследование имеет следующую структуру.

В разделе 1 показано, что в некоторой субгеометрической среде (абстрактном множестве ориентированных одномерных элементов) введение операции типа умножения порождает нестандартную алгебраическую систему – первичное квадратичное множество типа группоида, не имеющего, однако, единичного элемента, но допускающего делители нуля. В первичном множестве естественным образом определяются четыре базовых элемента, для которых строится таблица Кэли.

В разделе 2 отмечено, что введение второй операции (обобщенного сложения) расширяет первичное множество до развитой алгебраической системы, автоматически включающей в себя полный набор исключительных алгебр – действительных, комплексных и кватернионных чисел, а также алгебры дуальных чисел, двойных чисел и бикватернионов.

В разделе «Обсуждение и заключение» в компактной форме показано, что условие сохранения единиц указанных алгебр при простых деформациях базового абстрактного множества представляет собой дифференциальное уравнение, которое в физических единицах становится уравнением квантовой механики. Также приводятся основные результаты и перспективные направления исследования.

1. Абстрактная субгеометрическая структура порождает группоид с делителями нуля

На нулевом этапе построения множества гиперкомплексных чисел (и геометрии трехмерного «физического» пространства) базовой структурой оказывается оригинальная квазиалгебраическая система («странный группоид»), не имеющая аналогов в известной классификации таких алгебраических множеств. Коротко данную процедуру построения чисел можно описать следующим образом.

1.1. Базисное абстрактное множество ориентированных 1В элементов

Развивая идею Уилера, рассмотрим абстрактную «нефизическую» (субгеометрическую) среду F, составленную одномерными элементами $\{a, b, c \dots\} \in F$. Каждый элемент данной среды может быть представлен отрезком (прямой) линии (полоска, strip, string). Удобно и возможно (но необязательно) считать, что все элементы компланарны, то есть принадлежат некоторой плоскости; при этом они имеют различную длину и случайную ориентацию относительно друг друга (рис. 1).

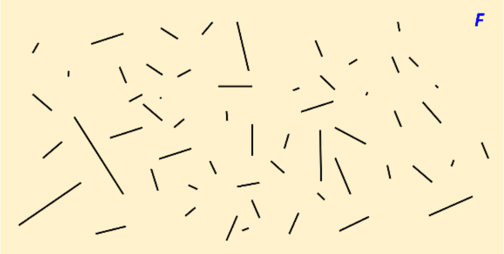

Рис. 1*а*. Множество случайным образом ориентированных элементов на субгеометрической плоскости *F*

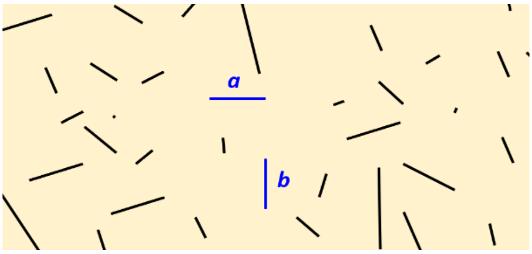

Рис. 1*б*. Выбирается пара ортогональных элементов стандартной длины

Норму $\|a\|$ и, следовательно, длину $|a|$, например, элемента $a \in F$ можно *условно* описать следующим образом: $\|a\| = |a|^2 \equiv \dot{a}a$; здесь $\dot{a}$ есть сопряженный элемент – это сопряжение общего вида, например комплексное, эрмитово или другое. С помощью некоторой операции стандартизации $S(a)$ можно сделать элемент a эталоном длины $|a| = \|a\| = I$; в частности, можно просто считать длину I единичной; этим стандартом в принципе можно измерять длины всех остальных элементов. Кроме того, пусть среди множества элементов F для элемента a всегда можно найти его *пару* – элемент

$b \in F$ (тоже эталонной длины $|b| = |a|$) такой, что отрезки a и b взаимно ортогональны; это условие можно описать так: $\dot{a}b = \dot{b}a = 0$.

Отметим, что приведенные здесь формулы носят сугубо иллюстративный характер, отражая лишь (суб-)геометрические свойства элементов – их «стандартизированную» длину и взаимную ориентацию. В частности, формальные описания нормы элемента и ортогональности пары не являются представлением какой-либо бинарной операции. По существу, эти формулы вообще не являются необходимыми, поскольку описываемая словесно «геометрия» и так понятна: есть два перпендикулярных отрезка стандартной («единичной») длины.

Тем не менее несложно дать математическое описание рассматриваемой ситуации в терминах некоторых объектов («свободных параметров») общего вида $\{\alpha, \beta \dots \sigma, \tau\} \notin F$, вообще говоря, внешних по отношению к множеству F; приведем простой пример. Пусть отрезки a и b описываются двухкомпонентными матрицами-столбцами $a = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}\sigma\\ \tau\end{pmatrix}$, а их сопряжение сводится всего лишь к транспонированию: $\dot{a} = (\alpha \quad \beta)$, $\dot{b} = (\sigma \quad \tau)$. Тогда условие стандартизации длины сводится к скалярному соотношению единичности

$$\dot{a}a = \dot{b}b = \alpha^2 + \beta^2 = \sigma^2 + \tau^2 = 1, \tag{1}$$

а условие ортогональности – к скалярному соотношению нулевой проекции

$$\dot{a}b = \dot{b}a = \alpha\sigma + \beta\tau = 0. \tag{2}$$

Отсюда, в частности, следует, что из 4 ранее свободных параметров независимым остается только один, пусть это параметр τ, выразим через него остальные параметры. Из уравнений (1) следует $\alpha = \sqrt{1-\beta^2}$, $\sigma = \sqrt{1-\tau^2}$; подстановка этих соотношений в уравнение (2) дает $\sqrt{(1-\beta^2)(1-\tau^2)} = -\beta\tau$, откуда после возведения в квадрат следует $\beta = \pm\sqrt{1-\tau^2}$, то есть с учетом (2) $\alpha = \mp\tau$. Более никакой существенной информации это описание не дает. Однако следует отметить, что в совокупности наличие среды F и установленного в ней стандарта длины, по сути, эквивалентно заданию неупорядоченного множества $\boldsymbol{R}_{\geq 0}$ действительных неотрицательных чисел $\{u, w, x, y, z \dots\} \in \boldsymbol{R}_{\geq 0}$, определяемых посредством сравнения каждого элемента Fс эталоном (ноль фиксирует отсутствие длины).

1.2. Простейшая алгебраическая система построенная на кдвратичном множестве

С целью построения простейшей алгебраической системы над множеством F зададим в паре $\{a, b\}$ *базовую бинарную операцию* $P_F(a, b)$ – умножение между разными элементами пары; вообще говоря, эта операция некоммутативна $N^a \equiv a\dot{b} \neq b\dot{a} \equiv N^b$. Здесь суперскрипты «*a*» и «*b*» не являются числовыми индексами, а задают различие названиям величин N по символу левого (несопряженного) элемента пары. Процедура и результат операции P_F, проиллюстрированные на данном выше примере представления элементов F

матрицами 2-го ранга, соответствуют так называемому прямому или тензорному умножению векторов:

$$N^a = a\dot{b} = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}(\sigma \quad \tau) = \begin{pmatrix}\alpha\sigma & \alpha\tau \\ \beta\sigma & \beta\tau\end{pmatrix}, N^b = a\dot{b} = \begin{pmatrix}\sigma \\ \tau\end{pmatrix}(\alpha \quad \beta) = \begin{pmatrix}\sigma\alpha & \sigma\beta \\ \tau\alpha & \tau\beta\end{pmatrix}. \quad (3)$$

Объекты типа N^a, N^b очевидно принадлежат некоторой квадратичной среде $F \otimes F$, элементы которой $\{N, C...\} \equiv \{ab, ba, a^2, b^2...\}$ в простейшем представлении могут рассматриваться как 2×2-матрицы. Используя этот факт, построим над множеством $F \otimes F$ простую алгебраическую систему V, определив бинарную операцию (N, C), аналогичную операции умножения матриц, и вычислим для базисных объектов N^a, N^b все возможные результаты этого умножения. Таковых всего четыре. Вычисления показывают, что первые два произведения – квадраты каждой из величин – являются нильпотентами

$$N^a \cdot N^a = a\dot{b} \cdot a\dot{b} = a(\dot{b}a)\dot{b} = 0, N^b \cdot N^b = b\dot{a} \cdot b\dot{a} = b(\dot{a}b)\dot{a} = 0. \quad (4)$$

В простом случае представления матрицами ранга 2 этот результат следует из прямого расчета с использованием уравнений (3) и (2). Вторые два произведения (разных величин) таковы:

$$N^a \cdot N^b = a\dot{b} \cdot b\dot{a} = a(\dot{b}b)\dot{a} = a\dot{a} \equiv C^a,$$
$$N^b \cdot N^a = b\dot{a} \cdot a\dot{b} = b(\dot{a}a)\dot{b} = b\dot{b} \equiv C^b; \quad (5)$$

суперскрипты при C также не являются числовыми индексами, а входят в наименование (здесь – это элемент, базисный для данной величины). Как видно, объекты C образованы по правилу базовой бинарной операции P_F (для каждого элемента пары), то есть по структуре они также принадлежат V, хотя возникают как вторичные конструкции.

Итак, из двух линейных элементов a, b (ортогональных и задающих стандарт длины), выделенных в базисном абстрактном множестве F, задав в нем бинарную операцию P_F (типа прямого произведения векторов), мы построили четыре простейших объекта – два базисных (нильпотенты) N^a, N^bи два производных C^a, C^b; все они являются элементами квадратичного множества V с определенной в нем одной бинарной операцией P_V (типа умножения матриц).

Нас интересуют все возможные произведения объектов N, C. Четыре из них – произведения только нильпотентов – определены формулами (4) и (5). Найдем соответствующие произведения производных объектов C. Их также четыре: два квадрата величин

$$C^a \cdot C^a = a\dot{a} \cdot a\dot{a} = a(\dot{a}a)\dot{a} = a\dot{a} = C^a,$$
$$C^b \cdot C^b = b\dot{b} \cdot b\dot{b} = b(\dot{b}b)\dot{b} = b\dot{b} = C^b, \quad (6)$$

и два взаимных произведения

$$C^a \cdot C^b = a\dot{a} \cdot b\dot{b} = a(\dot{a}b)\dot{b} = 0, C^b \cdot C^a = b\dot{b} \cdot a\dot{a} = b(\dot{b}a)\dot{a} = 0. \quad (7)$$

Из формул (6) следует, что оба производных объекта являются идемпотентами, а формула (6) свидетельствует, что C^a и C^b«взаимно ортогональны».

Остается найти результаты смешанных произведений $N \cdot \mathrm{C}$ и $\mathrm{C} \cdot N$. Покажем процесс умножения остальных смешанных произведений детально:

$$N^aC^a = a\dot{b} \cdot a\dot{a} = a(\dot{b}a)\dot{a} = 0,\; C^aN^a = a\dot{a} \cdot a\dot{b} = a(\dot{a}a)\dot{b} = a\dot{b} = N^a, \tag{8a}$$

$$N^aC^b = a\dot{b} \cdot b\dot{b} = a(\dot{b}b)\dot{b} = a\dot{b} = N^a,\; C^bN^a = b\dot{b} \cdot a\dot{b} = b(\dot{b}a)\dot{b} = 0. \tag{9a}$$

$$N^bC^a = b\dot{a} \cdot a\dot{a} = b(\dot{a}a)\dot{a} = b\dot{a} = N^b,\; C^aN^b = a\dot{a} \cdot b\dot{a} = a(\dot{a}b)\dot{a} = 0, \tag{8b}$$

$$N^bC^b = b\dot{a} \cdot b\dot{b} = b(\dot{a}b)\dot{b} = 0,\; C^bN^b = b\dot{b} \cdot b\dot{a} = b(\dot{b}b)\dot{a} = b\dot{a} = N^b. \tag{9b}$$

Формулы (4-9) в явной форме демонстрируют, что любое попарное умножение четырех простейших элементов (нильпотентов N и идемпотентов C), входящих в квадратичное множество V, возвращает результат в то же множество. Таким образом, множество V представляет собой некоторую простую алгебраическую структуру, где задана единственная бинарная операция P_F, для которой можно составить таблицу Кэли (рис. 2).

$\otimes$	N^a	N^b	C^a	C^b
N^a	0	C^a	0	N^a
N^b	C^b	0	N^b	0
C^b	0	N^b	0	C^b
C^a	N^a	0	C^a	0

Рис. 2. «Симметричная» таблица Кэли для бинарной операции P_F в квадратичном множестве V

В приведенной на рис. 1 таблице левый вертикальный столбец и верхний горизонтальный ряд намеренно содержат различную последовательность наименований идемпотентов; в данной трактовке таблица оказывается замечательно симметричной, имея по главной диагонали нули, по главной антидиагонали – нильпотенты, по антидиагоналям первого и четвертого миноров – производные идемпотенты.

По своим свойствам алгебраическая структура V является простейшей: умножение в ней не коммутативно и не имеет нейтрального (единичного) элемента; при этом, как видно из таблицы Кэли, она включает «делители нуля». Такая алгебраическая структура отвечает определению группоида (или магмы). Однако прямым вычислением несложно установить, что умножение P_F трех и более сомножителей типа $C \cdot C \cdot N$, $N \cdot C \cdot N$ и пр. ассоциативно; следовательно, V является и полугруппой (без единицы). Наделяя каждый из базовых элементов V весовыми множителями из упомянутого выше множества $\boldsymbol{R}_{\geq 0}$, мы можем определить особое множество чисел, принадлежащих расширенной полугруппе V_R, например:

$$Y \equiv uN^a + wN^b + xC^a + yC^b; \tag{10}$$

произведение любого числа таких чисел, согласно приведенной таблице Кэли (см. рис. 1), возвращает результат в множество V_R. Сам по себе факт существования подобной алгебраической системы, вероятно, представляет определенный интерес, но в данном случае он является всего лишь промежуточным результатом на пути построения серии замечательных алгебр.

2. Обратимое сложение преобразует полугруппу в базис гиперкомплексных чисел

2.1. Введение сложения и попарных сумм нильпотентов и идемпотентов

Конечность по числу элементов и замкнутость по ассоциативному умножению множества V подсказывают возможность введения в нем второй бинарной операции – обратимого сложения. Это тем более обоснованно, что «лишний» в умножении, но характерный для сложения нейтральный (нулевой) элемент V уже содержит. Поскольку элементы V возникают попарно и последовательно (пара нильпотентов, затем пара производных идемпотентов), представляется целесообразным рассмотреть их суммы и разности раздельно; для двух пар базисных элементов таких соотношений будет четыре. Определим алгебраические суммы производных идемпотентов как

$$C^a + C^b \equiv E, C^a - C^b \equiv \widetilde{K} \tag{11}$$

и найдем квадраты этих величин, используя формулы (6), (7) или таблицу Кэли:

$$E^2 = (C^a + C^b)(C^a + C^b) =$$

$$= C^b C^a + C^a C^b + C^b C^a + C^b C^b = C^a + C^b = E, \tag{12}$$

$$\widetilde{K}^2 = (C^a - C^b)(C^a - C^b) = C^a + C^b = E. \tag{13}$$

Определим также суммы нильпотентов

$$N^a + N^b \equiv \tilde{I}, N^a - N^b \equiv J \tag{14}$$

и вычислим их квадраты, используя формулы (4), (5):

$$\tilde{I}^2 = (N^a + N^b)(N^a + N^b) =$$

$$= N^a N^a + N^a N^b + N^b N^a + N^b N^b = C^a + C^b = E, \tag{15}$$

$$J^2 = (N^a - N^b)(N^a - N^b) = -E. \tag{16}$$

Итак, все квадраты введенных линейных комбинаций базовых элементов сводятся к единственной величине E. В качестве примера ее вычисления удобно применить предложенное выше простейшее представление 2D-матрицами:

$$E = C^a + C^b = a\dot{a} + b\dot{b} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}(\alpha \quad \beta) + \begin{pmatrix}\sigma\\ \tau\end{pmatrix}(\sigma \quad \tau) =$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha^2 + \sigma^2 & \alpha\beta + \sigma\tau \\ \beta\alpha + \tau\sigma & \beta^2 + \tau^2\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Принимая во внимание соотношения между параметрами, определяемое формулами (1) и (2) (см. конец раздела 2.1), находим из (17), что E в точности является единичной 2×2 матрицей, по сути – действительной (скалярной) единицей.

Дополнив операцией сложения полугруппу V, мы получили алгебраическую систему следующего уровня, которую будем обозначать символом V^+; покажем, что V^+генерирует серию известных алгебр.

2.2. Алгебры вещественных и комплексных чисел

Введение операции обратимого сложения имеет своим следствием не существенный для нее, но характерный для операции умножения нейтральный элемент – скалярную единицу. Снабдив только единицу E весовыми множителями из множества $\boldsymbol{R}_{\geq 0}$ и имея в виду обратимость введенной операции сложения (то есть расширение $\boldsymbol{R}_{\geq 0} \to \boldsymbol{R}$ за счет включения отрицательных чисел), мы получаем алгебру действительных чисел R. В ней определены две бинарные операции сложения и умножения, содержащие соответствующие нейтральные элементы $\{0,1\}$, эти операции отвечают свойствам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности (в силу скалярности единицы); есть деление.

Рассмотрим случай, когда наряду с действительной единицей весовыми множителями (из множества $\boldsymbol{R}$) наделяется только еще один объект J [см. формулу (14)]. Из (16) следует, что J является мнимой единицей, в данном случае она ведет себя как скаляр $J \to i$. Несложно видеть, что полученное множество формирует алгебру комплексных чисел C, базирующуюся на двух единицах $(1, i)$ и имеющую те же бинарные операции и нейтральные элементы, что и алгебра R.

2.3. Возникновение 2D-алгебр с делителями нуля

Рассмотрим в качестве базиса алгебраической структуры действительную единицу E и величину N^a. Наделяя их скалярными множителями из $\boldsymbol{R}$, мы получаем так называемую алгебру дуальных чисел – (гипер)комплексных чисел параболического типа, построенную на базисе $\{E, N^a\}$; обе бинарные операции коммутативны, ассоциативны и взаимно дистрибутивны, нейтральные элементы $\{0,1\}$. Но это – алгебра без деления, притом что в силу свойства (4) простейшим делителем нуля является сама «единица» N^a. Идентичная алгебра возникает также на базисе $\{E, N^b\}$.

Обратимся к объектам $\widetilde{K}, \tilde{I}$; из формул (13), (15) следует, что каждый из них является действительной единицей. В паре с E каждая из единиц $\widetilde{K}, \tilde{I}$ ведет себя как скаляр и образует базис алгебры двойных чисел (гипер)комплексных чисел гиперболического типа. Свойства двух ее бинарных операций схожи со свойствами операций алгебры двойных чисел, она имеет те же нейтральные элементы и также содержит делители нуля.

Таковыми простейшими являются числа $E+\widetilde{K}$ и $E-\widetilde{K}$, поскольку $(E+\widetilde{K})(E-\widetilde{K})=E^2-\widetilde{K}^2=0$. Отметим также, что любое двойное число может быть записано в так называемой ортогональной форме. Для числа с единицами $\{1,\widetilde{K}\}$: $U=x+y\widetilde{K}=(x+y)C^a+(x-y)C^b$ такое представление очевидно; для числа с единицами $\{1,\tilde{I}\}$:

$$U=x+y\tilde{I}=$$

$$=\frac{x+y}{4}(C^a+C^b+N^a+N^b)+\frac{x-y}{4}(C^a+C^b-N^a-N^b)\equiv\frac{x+y}{2}\tilde{C}^a+\frac{x-y}{2}\tilde{C}^a;$$

с помощью таблицы Кэли несложно показать, что $\tilde{C}^a$, $\tilde{C}^b$– также идемпотенты, и они ортогональны: $\widetilde{C^a\tilde{C}^b}=0$.

2.4. Генерирование алгебры кватернионов

Выделенным (исключительным) множеством в алгебраической системе V^+ является 4d-базис, содержащий частично модифицированный набор единиц, заданных формулами (11) и (14):

$$1=c^a+C^b=a\dot{a}+b\dot{b}, \tag{18a}$$

$$\boldsymbol{i}=-i\tilde{I}=-i(N^a+N^b)=-i(a\dot{b}+b\dot{a})\equiv q_1, \tag{18b}$$

$$\boldsymbol{j}=J=N^a-N^b=a\dot{b}-b\dot{a}\equiv q_2, \tag{18c}$$

$$\boldsymbol{k}=-i\widetilde{K}=-i(C^a-C^b)=i(a\dot{a}-b\dot{b})\equiv q_3. \tag{18d}$$

Это базис четырех кватернионных единиц, найденный Гамильтоном в 1843 г. Здесь в формулах (18) слева – обозначения единиц, предложенные Гамильтоном, справа – обозначения этих единиц как векторов 3D ортонормированного репера. Формулы (18) устанавливают «внутреннюю структуру» каждой из единиц в терминах базовых элементов множества V, так и в терминах базиса среды F; прямым вычислением несложно проверить, что правило умножения кватернионных единиц *постулированное* Гамильтоном (и записанное в традиционном или векторном виде):

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1,\; q_kq_j=-\delta_{kj}+\varepsilon_{kjn}q_n, \tag{19}$$

в представлении (18) тождественно выполняется.

Наделение единиц (18) скалярными коэффициентами из множества $\boldsymbol{R}$ формирует алгебру кватернионных чисел с двумя бинарными операциями – абелевым сложением и некоммутативным умножением, обладающими свойствами ассоциативности и взаимной дистрибутивности. Здесь заметим также, что алгебра бикватернионов – гиперкомплексных чисел, множители единиц которой принадлежат множеству комплексных чисел, – строится на том же базисе кватернионных чисел (18).

Обсуждение и заключение

Общая схема примененного в данном исследовании метода построения алгебраических систем на базе некоторой субгеометрической среды представлена на рис. 3.

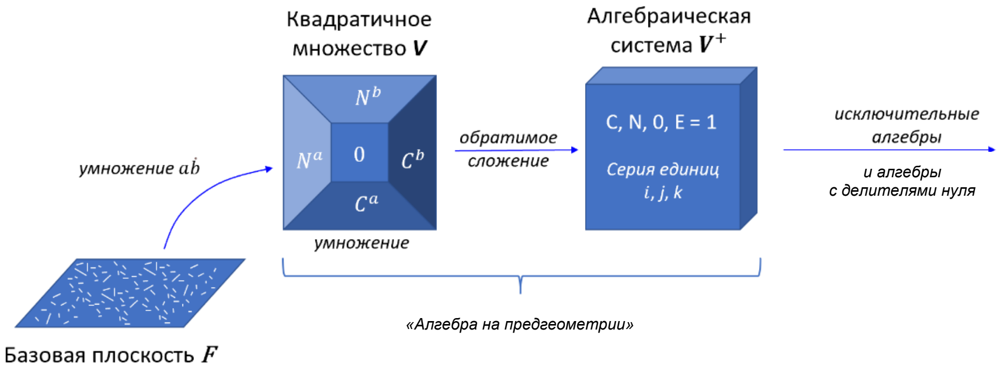

Рис. 3. Примерная схема построения алгебраических систем, базирующихся на свойствах абстрактной среды одномерных случайным образом ориентированных субгеометрических объектов

Кратко прокомментируем эту схему. Из множества лежащих в плоскости F одномерных объектов выделяется ортогональная пара стандартной «длины» – 2D-репер. Существенно (подчеркнем это еще раз), что плоскость F *не принадлежит трехмерному физическому миру*, а представляет собой идеальную модель некоторого абстрактного субгеометрического (или предгеометрического) пространства типа среды Уилера. Поэтому «длина» отрезков на плоскости также не является физической длиной[1]. Основой дальнейших процедур в данной схеме является 2D-репер. Прямые произведения его компонент дают четыре квадратичных элемента – 2 нильпотента, два идемпотента, для которых задается первая бинарная операция умножения (типа матричного). Анализ показывает, что построенное таким образом квадратичное множество V имеет делители нуля. Введение второй бинарной операции – обратимого сложения – преобразует группоид V в расширенную алгебраическую систему V^+, в которой, как простейшие структуры, естественно возникают единицы всех исключительных ассоциативных алгебр, а в сочетании с множеством $\boldsymbol{R}$ генерируются алгебры вещественных, комплексных, дуальных, двойных и кватернионных чисел. В известном смысле этот факт демонстрирует возможность трактовки абстрактного пространства F как модели основания базиса фундаментальных математических конструкций. Более того, детальное изучение абстрактной предгеометрической поверхности показывает, что формализация процедуры построения в F стандартного 2D-репера

[1] Тем не менее наличие стандарта дает возможность измерения «длин» всех абстрактных отрезков, составляющих множество скалярных чисел $\boldsymbol{R}_{\geq 0}$; в дальнейшем при введении обратимого сложения это множество расширяется до $\boldsymbol{R}$ и используется для формирования алгебр.

(именно построения, а не выбора) в совокупности с введением параметра абстрактной «длительности» имеет своим результатом дифференциальное «уравнение стабильности» элемента такой поверхности; это уравнение при надлежащем выборе физических единиц оказывается точным уравнением квантовой механики – уравнением Шредингера [4; 5] или уравнением Паули [6]. Таким образом, понятие предгеометрии и его математическое воплощение – абстрактное множество F – с высокой степенью вероятности можно считать одним из успешных вариантов модели основания и теоретической физики.

Литература

1. *Wigner E. P.* The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard Courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959 // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1960. 13 (1). P. 1–14.
2. *Blokhintsev D. I.* Quantum Mechanics. 1 ed. Dordrecht, Holland: D. Riedel Publ. Co., 1964.
3. *Wheeler J. A.* Pregeometry: motivations and prospects // Quantum theory and gravitation / ed. by A. R. Marlov. New York: Academic Press, 1980. P. 1–11.
4. *Yefremov A. P.* The general theory of particle mechanics. A special course. Newcastle, UK: Cambrige Scholar Publ., 2019.
5. *Yefremov A. P.* "General theory of particle mechanics" arising from a fractal surface // Gravitation and Cosmology. 2015. Vol. 21 (1). P. 19–27. DOI: 10.1134/S0202289315010144
6. *Yefremov A. P.* The Fractal Structure of Space Entails Origin of Pauli's Equation // Gravitation and Cosmology. 2019. Vol. 25 (4). P. 305–309. DOI: 10.1134/S0202289319040157.

HYPERCOMPLEX ALGEBRAIC STRUCTURES ORIGINATING ON A SET OF ONE-DIMENSIONAL ELEMENTS

Alexander P. Yefremov

Institute of Gravitation and Cosmology
RUDN University
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Abstract. A series of hypercomplex numerical sets having a compositional structure is shown to arise in an abstract environment consisting of randomly oriented 1D geometric objects. We focus on the series'core set which is represented by a groupoid-type algebraic system with one binary operation, associative multiplication, admitting zero-dividers but having no unity; an original Cayley-type table for this set is given. Introduction of the operation of reversible addition extends the set to algebras of real, complex and hypercomplex numbers with units built of the initial simple elements. It is demonstrated that this fundamental mathematics is tightly linked with the origin of the basic equation of quantum physics.

Keywords: algebraic system, binary operation, Cayley table, hypercomplex numbers