DOI: 10.22363/2224-7580-2023-2-76-80
EDN: JNHFFQ

СЛУЧАЙНОЕ ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО И ВИНЕРОВСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Ю.П. Рыбаков

Российский университет дружбы народов
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Аннотация. Обсуждается предложенное Винером специальное представление квантовой механики, в котором волновая функция выступает как гауссовская случайная величина, то есть как вектор случайного гильбертова пространства. Проясняется связь этого представления с известной программой Эйнштейна по созданию последовательной полевой формулировки физики частиц, в которой частицы рассматриваются как солитоны, сгустки некоторого материального поля, подчиняющегося нелинейным уравнениям.

Ключевые слова: случайное гильбертово пространство, солитонные конфигурации, топологические инварианты

Американский математик Норберт Винер хорошо известен своими работами по логике, вычислительной математике, кибернетике, гармоническому анализу и теории вероятности. Будучи профессором Массачусетского технологического института, он читал студентам-электрикам лекции, которые впоследствии были изданы [1], по применению теории случайных процессов к электрическим сетям. Любопытно, что в этих лекциях Винер нашел неожиданное приложение построенной им *теории броуновского движения* (знаменитой *меры Винера*) к квантовой механике. Ему удалось построить специальное представление волновой функции как элемента случайного гильбертова пространства $\mathscr{H}_{rand}$, в котором скалярное произведение определяется с помощью операции усреднения M:

$$(\psi_1, \psi_2) = M(\psi_1^* \psi_2). \tag{1}$$

Предварительно Винер рассмотрел вещественную броуновскую траекторию $x(s, \alpha)$ с номером $\alpha \in [0,1]$, параметром эволюции $s \in [0,1]$ и коррелятором вида

$$\int_0^1 d\alpha\, x(s, \alpha)\, x(s', \alpha) = \min(s, s'). \tag{2}$$

Этот броуновский случайный процесс обобщается на комплексное пространство:

$$z(s \mid \alpha, \beta) \equiv [x(s, \alpha) + i\, y(s, \beta)]/\sqrt{2}; \quad \alpha, \beta \in [0,1], \tag{3}$$

а параметр эволюции связывается с координатой $\vec{r}$ квантовой частицы путем стандартного отображения

$$\vec{r} \in R^3 \Rightarrow s \in [0,1].$$

После этого волновая функция $\psi(s)$ подвергается интегральному преобразованию

$$\int\limits_{s\in[0,1]} dz\,(s\,|\,\alpha,\beta)\,\psi(s) = <\alpha,\beta\,|\,\psi> \in \mathscr{H}_{rand}\,. \tag{4}$$

При этом из (2) выводится условие унитарности данного преобразования:

$$\int\limits_0^1 ds\,|\,\psi(s)\,|^2 = \iint\limits_{[0,1]^2} d\alpha\, d\beta\,|<\alpha,\beta\,|\,\psi>|^2\,. \tag{5}$$

Целью настоящей работы является установление связи между подходом Винера к квантовой механике и грандиозной программой геометризации физики, предложенной Эйнштейном [2; 3] и Ми [4] и основанной на изложенной выше концепции единого (первичного) материального поля (“unitary field”). Для обоснования этой связи прежде всего необходимо ответить на вопрос о природе первичного нелинейного поля, сгустками которого являются частицы. Для ответа на этот вопрос обратимся к знаменитой задаче Л. Эйлера об *n* квадратах [5]:

«Представить квадрат суммы *n* квадратов вещественных чисел в виде суммы *n* квадратов:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2\,,$$

где c_i – билинейные комбинации чисел a_k».

Оказывается, что при *n* = 2 решение этой задачи было уже известно Пифагору, Диофанту, Фибоначчи, Брахмагупте и другим античным математикам. В этом случае $c_1 = a_1^2 - a_2^2;\quad c_2 = 2a_1a_2$, и иллюстрацией применения этого решения может служить знаменитый «египетский треугольник» со сторонами 3, 4, 5. В 1748 году Эйлер получил решение для *n* = 3 и *n* = 4, используя ортогональные матрицы размерности соответственно 3×3 и 4×4, элементы которых суть билинейные комбинации 4 и 8 произвольных чисел. Комментируя последнее полученное решение, он записал в своем дневнике (цит. по: [5]):

«Это решение заслуживает тем большего внимания, что я пришел к нему не при помощи какого-либо определенного метода, а как бы догадками; а так как оно к тому же содержит 8 произвольных чисел, которые после приведения к единице сводятся к семи, то едва ли можно сомневаться, что решение это универсальное и заключает в себе все возможные решения. Если кто-нибудь найдет прямой путь к проведению этого решения, то будет считаться, что он оказал анализу выдающуюся помощь. Существуют ли подобные решения для более широких квадратов, которые состоят из 25, 36 и т. д. чисел, я едва ли решусь утверждать. Тут не только обыкновенная алгебра, но и диофантов метод, кажется, получит огромный вклад».

Впоследствии выяснилось, что решение, найденное Эйлером, может быть получено при помощи кватернионов [5]. Более того, в 1838 году немецкий алгебраист Адольф Гурвиц доказал фундаментальную теорему о существовании только *четырех нормированных алгебр*, а именно алгебр вещественных и комплексных чисел, кватернионов и бикватернионов (октав) [6; 7]. Согласно теореме Гурвица, задача Эйлера не имеет решения при $n = 5, 6, 7$, но имеет его при $n = 8$.

Изящное геометрическое решение задачи Эйлера при $n = 8$ нашел выдающийся итальянский геометр Франческо Бриоски (1824–1897) [8], который для описания 8-мерного пространства использовал *комплексные проективные координаты – спиноры*, имеющие 16 компонент. Бриоски обнаружил для 8-пространства замечательную симметрию – *принцип триальности* [9], согласно которому существует три равноправных геометрических объекта: 8-вектор и два 8-компонентных полуспинора, линейные преобразования которых порождают вращения в 8-пространстве. При этом решение задачи Эйлера опирается на замечательное *тождество Бриоски*, справедливое для любого 8-спинора ψ :

$$j_\mu j^\mu - \tilde{j}_\mu \tilde{j}^\mu = s^2 + p^2 + \vec{v}^{\,2} + \vec{a}^{\,2}, \tag{6}$$

где используются стандартные билинейные по спинорному полю величины:

$$s = \overline{\psi}\psi, \quad p = i\overline{\psi}\gamma_5\psi, \quad \vec{v} = \overline{\psi}\vec{\lambda}\psi, \quad \vec{a} = i\overline{\psi}\gamma_5\vec{\lambda}\psi,$$
$$j_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad \tilde{j}_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi, \quad \overline{\psi} = \psi^+\gamma_0 ,$$

содержащие матрицы Дирака γ_μ, γ_5 и внутренние (изотопические) матрицы Паули $\vec{\lambda}$.

Структура тождества (6) идеально подходит для обеспечения устойчивости солитонов как конфигураций с минимальной энергией. В самом деле, если считать, что для искомого состояния правая часть (6) принимает некоторое фиксированное значение (*принцип спонтанного нарушения симметрии*):

$$s^2 + p^2 + \vec{v}^2 + \vec{a}^2 = const, \tag{7}$$

то уравнение (7) определяет структуру полевого многообразия, то есть соответствующее фазовое пространство, 7-сферу S^7. Нетрудно видеть, что S^7 включает в качестве подмногообразий сферы S^3 и S^2, для которых третья гомотопическая группа нетривиальна:

$$\pi_3(S^3) = \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}.$$

Например, в случае $s^2 + \vec{a}^2 = const$ получаем сферу S^3, порождающую состояния с нетривиальным топологическим зарядом типа *степени отображения*

$$Q = \deg(S^3 \Rightarrow S^3) = \mathrm{B},$$

который может быть интерпретирован как *барионное число.* К этому классу относится хорошо известная в ядерной физике *модель Скирма* [10].

Наконец, в случае подмногообразия S^2: $\vec{v}^2 = const,$ получаем состояния с нетривиальным *индексом Хопфа* $Q_H = L,$ который, по предложению Л.Д. Фаддеева [11], может быть интерпретирован как *лептонное число*. Существование топологических солитонов в указанных моделях было строго установлено [12].

Для объединенного описания барионов и лептонов естественно использовать 16-компонентные спиноры Бриоски $\Psi = \psi_1 \oplus \psi_2$ как соединение двух 8-спиноров. Это позволяет получить 16-спинорную реализацию *киральной модели Скирма – Фаддеева* [13], допускающей существование стабильных солитонных конфигураций. Оказывается, что с помощью солитонов можно построить специальное стохастическое представление о волновой функции, эквивалентное винеровскому [13–15]. Для иллюстрации метода построения этого представления предположим, что нам известна лагранжева плотность модели L, зависящая от некоторого многокомпонентного вещественного поля ϕ и его производных. Допустим, что рассматривается n-частичная конфигурация, задаваемая n-солитонным решением. В таком случае поле ϕ и его канонический импульс $\pi = \partial L / \partial \phi_t$ разбиваются на n солитоноподобных слагаемых:

$$\phi\,(t, \vec{r}) = \sum_{k=1}^{n} \phi^{(k)}(t, \vec{r}); \quad \pi\,(t, \vec{r}) = \sum_{k=1}^{n} \pi^{(k)}(t, \vec{r})\,. \tag{8}$$

Введем теперь на основании (8) вспомогательные комплексные функции

$$\varphi^{(k)}(t, \vec{r}) = [\nu_k \phi^{(k)} + i\,\pi^{(k)} / \nu_k] / \sqrt{2}; \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

в которых постоянные ν_k находятся из условия нормировки

$$\hbar = \int d^3x \,|\, \varphi^{(k)} \,|^2 ,$$

где $\hbar$ – постоянная Планка. Рассмотрим теперь случайную выборку из $N >> 1$ солитонных конфигураций (9), считая их независимыми. Например, случайными могут быть как сами профили (9), так и их фазы и скорости. В результате можно построить следующий аналог волновой функции в конфигурационном пространстве R^{3n}:

$$\Psi_N(t, \vec{r}_1, \ldots \vec{r}_n) = (\hbar^n N)^{-1/2} \sum_{j=1}^{N} \prod_{k=1}^{n} \varphi_j^{(k)}(t, \vec{r}_k)\,. \tag{10}$$

При этом одночастичная конфигурация в j-м испытании есть $\varphi_j^{(k)}(t, \vec{r}_k)$.

Как видно, конфигурация (10) представляет собой сумму большого числа независимых случайных солитонов, имеющих конечную дисперсию, и поэтому, согласно центральной предельной теореме [16], она является гауссовской случайной переменной, эквивалентной винеровскому представлению волновой функции. В работах [13–15] было показано, что структура (10) согласуется с нерелятивистской квантовой механикой, и в частности, с правилом Борна вычисления средних, если ошибка измерения координаты намного больше, чем размер частицы-солитона.

Литература

1. *Винер Н.* Нелинейные задачи в теории случайных процессов. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.д
2. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 2. М.: Наука, 1966.
3. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 4. М.: Наука, 1967.
4. *Mie G.* Grundlagen einer Theorie der Materie // Ann. der Physik. 1912. B. 37. S. 511–534; B. 39, S. 1–40; 1913. B. 40, S. 1–66.
5. *Граве Д. А.* Трактат по алгебраическому анализу. Т. 1: Начала науки. Киев: Изд-во АН УССР, 1938.
6. *Hurwitz A.* Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln // Nachr. Ges. der Wiss. Gött. 1898. S. 309-316.
7. *Конвей Дж. Х., Смит Д. А.* О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях. М.: Изд-во МЦНМО, 2009.
8. *Nœther M.* Francesco Brioschi // Math. Ann. 1898. B. 50. S. 477–491.
9. *Cartan E.* The Theory of Spinors. Paris: Hermann, 1966.
10. *Skyrme T. H. R.* A unified field theory of mesons and baryons // Nucl. Phys. 1962. Vol. 31, no. 4. P. 556–569.
11. *Faddeev L. D.* Gauge invariant model of electromagnetic and weak interactions of leptons // Rep. Acad. Sci. USSR. 1973. Vol. 210, no. 4. P. 807–810.
12. *Rybakov Yu. P.* Axially symmetric topological configurations in the Skyrme and Faddeev chiral models // Eurasian Math. Journal. 2015. Vol. 6, no. 2. P. 82-89.
13. *Rybakov Yu. P.* On the causal interpretation of quantum mechanics // Found. of Phys. 1974. Vol. 4, no. 2. P. 149–161.
14. *Rybakov Yu. P.* La théorie statistique des champs et la mécanique quantique // Ann. Fond. L. de Broglie. 1977. Vol. 2, no. 3. P. 181–203.
15. *Rybakov Yu. P.* Topological solitons in the Skyrme – Faddeev spinor model and quantum mechanics // Gravitation and Cosmology. 2016. Vol. 22, no. 2. P. 179–186.
16. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: ГИФМЛ, 1961.

RANDOM HILBERT SPACE AND WIENER'S INTERPRETATION OF QUANTUM MECHANICS

Yu.P. Rybakov

RUDN University
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Abstract. The special representation of quantum mechanics suggested by Wiener is studied, the wave function being considered as Gaussian random variable, i. e. the vector of the random Hilbert space. The connection between this representation and the well-known Einstein's program aiming at creating the consistent field formulation of particle physics is revealed, with particles being represented as solitons, clots of some material field satisfying nonlinear equations.

Keywords: random Hilbert space, soliton configurations, topological invariants