МЕТАФИЗИЧЕСКАЯ РОЛЬ ЧИСЕЛ

DOI: 10.22363/2224-7580-2021-4-119-158

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЕЛ И РЕЗОНАНС*

К. Домбровский, К. Станюкович

Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы
Российская Федерация, 119361, Москва, ул. Озерная, д. 46

Аннотация. В статье обсуждены вопросы соотношения периодов колебаний физических систем с проблемой распределения рациональных чисел на числовой оси. Рассмотрено также представление чисел цепными дробями. Особое внимание уделено физическим следствиям соотношений периодов колебаний, таких как связь «золотого сечения» с законом распределения планетных расстояний, связь закономерностей процессов передачи информации с реализованной в природе чувствительностью человеческого глаза.

Ключевые слова: периоды колебаний, резонанс, рациональные числа, цепные дроби, золотое сечение, планетные расстояния, чувствительность человеческого глаза.

1. Числа и колебания

Первые исследования резонанса и его зависимости от чисел восходят еще к Пифагору, благодаря которому, по-видимому, были установлены количественные взаимоотношения при взаимодействии простейших колебательных систем – одновременном звучании нескольких струн.

Двумя тысячелетиями позже, трудами Галилея и Гюйгенса был сделан следующий существенный шаг в этой области – открытие изохронности качаний маятника позволило применить колебания систем для измерения времени.

Далее получено математическое обобщение понятий кругового, колебательного и вообще любого периодического движения и применения этого обобщения к таким областям знания, как физика, астрономия, биология… Но

---

* Текст публикации подготовил В.А. Панчелюга на основе манускрипта, предоставленного Д.Д. Рабунским.

только в начале двадцатого столетия Макс Планк в своей статье «Единство физической картины мира» четко сформулировал мысль, что, по существу, все обратимые процессы имеют колебательную природу:

«Мы выразим суть второго начала термодинамики, – пишет Планк, – если скажем, что в природе существуют необратимые процессы. Поэтому изменения в природе имеют одностороннее направление. С каждым отдельным необратимым процессом мир делает шаг вперед, следы которого остаются неизгладимыми. Образцами необратимых процессов являются кроме трения, теплопроводность, диффузия, электропроводность, излучение света и тепла, распад атомов радиоактивных веществ и др. Примером обратимых процессов являются движение планет, свободное падение в безвоздушном пространстве, незатухающее движение маятника, распространение волн света и звука без поглощения и дифракции, незатухающие электрические колебания и т.п. Все эти процессы или сами по себе периодичны, или же могут быть целиком обращены при помощи соответствующих приемов так, чтобы в природе не осталось больше других изменений» [1].

Это высказывание Макса Планка имеет очень глубокое значение, так как дает подход к пониманию односторонней направленности хода времени.

Связь теории колебаний с теорией чисел восходит к самым глубоким представлениям о природе. Всюду в доступной нашему наблюдению части Вселенной действуют, насколько мы можем судить, одни и те же закономерности колебательных процессов и справедливы одни и те же отношения между числами, которые мы наблюдаем на нашей Земле. Собственно, уже сам факт, что мы можем видеть или фиксировать приборами излучение наиболее удаленных объектов Метагалактики, исследовать их спектры, говорит о том, что в пределах, доступных нашему наблюдению, действуют одни и те же физические законы электромагнитных колебаний. Излучения самых далеких галактик имеют ту же физическую природу, что и огонек свечи в домике лесника. И здесь и там мы имеем дело с вполне аналогичными квантово-механическими процессами, и это служит наиболее наглядным подтверждением известного философского тезиса о материальном единстве мира.

Но мы можем не только видеть далекие источники излучения, мы можем их сосчитать. Этот простой, казалось бы такой самоочевидный, факт позволяет утверждать, что в пределах наблюдаемой нами части Метагалактики действуют те же самые числовые закономерности, что и на нашей Земле.

Но отсюда следует весьма важный вывод: если где-то во Вселенной существует разумная жизнь, а с возможностью этого мы обязаны считаться, то, какие бы странные формы она ни приняла, при достаточном уровне развития разума, инопланетяне должны создать такую же и только такую же числовую теорию, как и та, которая создана людьми на Земле. Потому что числа и законы, их связывающие, есть объективная реальность, присущая нашему миру, подобно законам тяготения или электродинамики. В наших построениях мы исходим из убеждения, что числа и их отношения, и вообще все то, что понимается под словом «математика», есть объективное свойство нашего мира и ни в коей мере не зависит от воли отдельных людей. Роль ученых сводится лишь к пониманию, выяснению тех или иных объективно существующих закономерностей. В конце концов вся математика начинается с нескольких элементарных понятий – целых чисел, их отношений, простейших арифметических действий. Из этих элементов путем логических построений возводится все стройное и величественное здание современной математики. Причем, и это важно отметить, выводится совершенно однозначно, одним-единственным способом, хотя к этому объективному знанию часто можно прийти самыми различными путями. Это следствие того, что числа, как и другие физические закономерности, являются объективной реальностью, а не созданием чьей-либо мысли.

Такой объективный характер связи физических и даже физико-логических процессов и некоторых числовых соотношений с полной ясностью проявляется, например, при исследовании музыкальной гармонии и явлений резонанса. Еще пифагорейцами было установлено, что наиболее «чистые», приятные для слуха сочетания звуков получаются, когда длина струны и, соответственно, частота колебаний находятся в простых рациональных отношениях, то есть выражаются отношениями небольших целых чисел. В этом случае при одновременном звучании двух струн возникает явление резонанса – взаимного усиления колебаний. И наоборот, в том случае, когда длины струн находятся в иррациональном отношении, например $1:\sqrt{2}$, резонанс не возникает, а одновременное звучание двух таких струн воспринимается как раздражающий диссонанс. Галилей в своей знаменитой книге «Дискорси…» по этому поводу писал: «…причина формы музыкальных интервалов лежит… в отношении между числами колебаний… Установив это, мы можем с большой уверенностью найти основание тому, почему при многих звуках, различных по тону, некоторые воспринимаются нами с удовольствием, иные нам менее приятны и третьи, наконец, производят крайне неприятное ощущение, то есть найти основание для более совершенных консонансов и диссонансов. Неприятное впечатление от последних происходит, думается мне, от несогласованности колебаний, производимых двумя различными тонами и беспорядочно поражающих наш слух: особенно резким является диссонанс в том случае, когда числа колебаний несоизмеримы, например, если при двух в унисон настроенных струнах заставить звучать струну и часть, относящуюся ко всей струне, как сторона квадрата к его диагонали, диссонанс, подобный тритонусу или полудиапенте» [2].

Исследованиями Пифагора и Галилея была установлена четкая связь между такой тонкой эстетической категорией, как эмоциональное воздействие музыки, и сухой, прозаически точной наукой – теорией чисел.

Теория чисел – это одна из самых отвлеченных, наиболее абстрактных ветвей математики, но в то же время она лучше других поддается простой опытной проверке и это роднит ее с такими, традиционно экспериментальными, областями знания, как физика или техника. В наше время в связи с развитием ЭВМ и цифровых методов моделирования действительности теория чисел приобретает особое значение. Многие закономерности микромира определяются простыми целочисленными отношениями, которые, по наблюдениям Галилея, определяют музыкальную гармонию и то, что мы сейчас называем резонансом. Все это обуславливает тот интерес и внимание, которые сегодня привлекают к себе закономерности распределения чисел на числовой оси и связь этого распределения с явлением резонанса.

Еще математики Древней Греции обратили внимание на кажущуюся случайность и беспорядочность последовательности простых чисел в натуральном ряду. Их распределение в начале числовой оси знакомо всем, но до сих пор таит неразрешимые загадки. Этой проблемой занимались Евклид и Эратосфен, Эйлер и Гаусс, Дирихле и Риман. Значительные успехи в поисках закона распределения простых чисел были достигнуты русской математической школой – П.Л. Чебышевым и, уже в наше время, – И.М. Виноградовым. Однако полное решение этой задачи до сих пор не найдено.

Вопросом же о распределении на числовой оси рациональных чисел таких чисел, которые могут быть представлены несократимой дробью p/q, занимались меньше, может быть, потому, что сама возможность его постановки не была очевидной. Действительно, если, как это следует из теории, между двумя любыми рациональными числами, как бы близко одно от другого они ни были расположены, можно разместить бесконечно много других рациональных чисел, то, казалось бы, этим и исчерпывается проблема их распределения на числовой оси. Сам вопрос о возможности существования какого-то закона их распределения на числовой оси, подобного закону распределения простых чисел, мог представиться не имеющим смысла. Казалось бы – как можно обсуждать вопрос о плотности в той или иной части числовой оси, если известно, что всюду она равна бесконечности?

Все это верно и не может быть предметом спора или даже обсуждения. И все же… Целый ряд фактов, известных уже со времен ученых древности, говорит о том, что некоторые процессы и явления, например, все системы, чье состояние определяется взаимодействием нескольких осцилляторов, ведут себя существенно различно в зависимости от того, в какой точке числовой оси находятся те рациональные числа, которыми приближенно выражается отношение периодов их колебаний.

Простейший пример тому, приводимый еще Галилеем, – это явление резонанса в системе из трех струн, собственные периоды колебаний которых относятся как рациональные числа – 1:1.5:1.414. В музыке эти отношения называются квинта и увеличенная кварта. Каждый, кто хоть немного знаком с теорией музыки, легко поймет, а другим не остается ничего иного, как поверить на слово, что хотя разница между числами 1.5 и 1.414 не так уж велика – 0.086, но в одном случае получается приятный для слуха гармоничный аккорд, а в другом – резкий раздражающий диссонанс. Объяснить это можно лишь близостью рационального числа 1.414 к иррациональному числу $\sqrt{2}$, равному 1.41421…

Более глубокое и строгое исследование подобной проблемы – влияния малых отклонений от условий резонанса – содержится в проведенном В.И. Арнольдом доказательстве теоремы А.Н. Колмогорова об устойчивости Солнечной планетной системы. В этой работе с полной ясностью выступает значение не только равенства, но и близости отношений периодов колебаний к тем или иным иррациональным числам [6; 8].

2. Неравномерность распределения рациональных чисел

Наше познание мира происходит различными способами, разными методами человеческого мышления. Физико-математическое описание или, говоря более широко, естественнонаучное познание в конечном итоге приводит к тому, что все более или менее сложные явления природы мы вынуждены записывать в виде дифференциальных или интегральных уравнений. Решая их, мы обнаруживаем зависимости, которые называем законами природы. Эти уравнения позволяют довести объяснение конкретного явления до числа, дают ему количественную оценку. Именно такие числовые параметры являются наиболее объективными характеристиками исследуемых процессов.

Явления природы описываются числами, которые имеют разные размерности, разный физический смысл. Например, масса выражается в килограммах, сила – динах, скорость – в сантиметрах или километрах в секунду, смотря по тому, какой диапазон мы берем. Однако наиболее важными числовыми характеристиками, связанными с нашим изучением макро- и микромира, являются безразмерные величины, то есть такие величины, которые не меняют своего значения при изменении единиц измерения. Например, отношение диаметра к длине окружности – π. Они могут выражаться как рациональными, так и иррациональными числами. Такие величины играют наиболее существенную роль во всех научных исследованиях. При этом следует заметить, что в наших измерениях, расчетах и вычислениях, будь то размеры галактик или площадь комнаты, мы всегда пользуемся исключительно только рациональными числами с ограниченными числителями и знаменателями, несмотря на то, что они составляют лишь бесконечно малую долю всех действительных чисел.

В то же время фактические отношения двух любых физических величин почти всегда или с вероятностью, бесконечно мало отличающейся от достоверности, выражаются числами иррациональными. Это следует хотя бы уже из того, что их бесконечно больше, чем рациональных. Но тогда получается, что такие символы, как e, π, $\sqrt{2}$ и т.п., имеют значение лишь пустых математических абстракций, точно отражающих идеализированную действительность и никогда не реализуемых ни в фактических измерениях, ни в наших, даже самых точных, вычислениях, так как любой измерительный прибор, любая ЭВМ могут оперировать лишь с рациональными числами с ограниченными знаменателями. Поэтому в тех реальных измерениях, которые мы способны производить, отношение диагонали квадрата к его стороне всегда выражается только приближенно, рациональным числом, дробью 1.4142…, которая, правда, может быть вычислена с любой степенью точности, но остается при этом всегда лишь более или менее хорошей аппроксимацией истинного значения, которое, однако, принципиально никогда не может быть реализовано. Поэтому всякое наше вычисление, всякое наше знание по необходимости всегда неточно, приблизительно. Все это, впрочем, является всего лишь приложением к теории чисел понятий, развивающейся в последние годы теории нечетких множеств, таких множеств, границы которых не могут быть точно определены.

Для большинства случаев практической деятельности не имеет значения – рациональными или близкими к ним иррациональными числами выражаются отношения тех или иных величин. Но есть обширный и весьма важный круг явлений, для которых арифметическая природа чисел имеет решающее значение – это все физические процессы, связанные с явлением резонанса – механические вибрации, радио, музыка, устойчивость колебательных систем, таких, например, как Солнечная планетная система, наконец, наши речь, слух и зрение.

Во всех этих случаях связь физического процесса и теории чисел обусловлена тем, что явление резонанса может возникнуть лишь при простых рациональных отношениях периодов колебаний двух осцилляторов, – «простых» в том смысле, что числитель и знаменатель малы по их абсолютной величине, таких, например, как 1/1, 2/3 и т.п. И наоборот, резонанс принципиально не может возникнуть при иррациональном отношении периодов. Для резонанса необходимо периодическое совпадение фаз колебаний двух взаимодействующих осцилляторов, совпадение собственной частоты приемника и частоты возбуждающих колебаний. Только благодаря этому мы можем видеть и слышать. Но при иррациональном отношении периодов такое совпадение невозможно. Раз случившись, оно уже никогда не может точно повториться в силу несоизмеримости периодов. Это имеет место, например, при одновременном звучании нот ДО и ФА-ДИЕЗ темперированного строя рояля, отношение периодов которых равно единице к корню из двух, чем и объясняется неприятное для слуха ощущение диссонанса, отмеченное еще Галилеем.

Но такое рассуждение производит впечатление порочного, потому что приводит к противоречию: ведь если технически невозможно изготовить такие эталоны длины, времени или частоты колебаний, которые выражались бы точно рациональными числами, если, как утверждает «царица наук» математика, строго рациональные отношения двух величин могут встретиться лишь как бесконечно редкие исключения, то явление резонанса должно быть вообще технически не реализуемым.

Но тогда встает естественный вопрос: почему же все-таки обваливаются мосты и разрушаются фундаменты машин под воздействием колебаний, «попавших в резонанс»? Как могут в этом случае существовать музыка или телевидение, целиком основанные на явлении резонанса?

Но так как существование музыки и телевидения не оставляет сомнений, остается предположить, что для возникновения резонанса совсем не нужно, чтобы периоды колебаний находились точно в рациональном отношении, например ½; достаточно, если это отношение будет выполняться приблизительно, скажем, не ½, а 1/1.999999. Чем точнее – тем лучше, тем сильнее будет сказываться резонанс, тем чище будет звучать музыкальный аккорд. И это полностью подтверждается практикой – при плавном изменении возбуждающей частоты резонанс возникает не сразу, а постепенно усиливается по мере приближения отношения частот к критическому значению. То же относится и, наоборот, к случаю отсутствия резонанса при иррациональном отношении периодов; достаточно, чтобы оно было близко к некоторым (но не всяким!) иррациональным числам. Иными словами, при отношении периодов иррациональном, но близком к рациональному числу с малыми числителем и знаменателем резонанс будет иметь место, а при отношении периодов тоже иррациональном, но близком к некоторому иррациональному числу резонанс возникнуть не может. Это полностью соответствует действительности и неосознанно постоянно применяется людьми на практике на протяжении уже многих тысячелетий. Настройка всякого музыкального инструмента всегда сводится к достижению возможно более близкого, но никогда не абсолютно точного отношения периодов колебаний двух струн.

Хорошую очень наглядную иллюстрацию того, что природа лишь весьма приближенно, округляя в духе нечетких множеств, оценивает арифметическую природу чисел, можно наблюдать на экране осциллографа. Известен метод сравнения частот колебаний электрического напряжения, основанный на появлении на экране осциллографа так называемых фигур Лиссажу. Они возникают, когда на вертикальные и горизонтальные отклоняющие пластины электронно-лучевой трубки подаются напряжения разной частоты. Если отношение частот равно 1/1, то на экране видно изображение круга или эллипса, если отклоняющие напряжения не равны между собой. Если отношение частот равно ½ – на экране видно характерное изображение в форме восьмерки.

При отношениях частот 5/4, 2/3, 7/5 образуются более сложные фигуры, состоящие из горизонтальных и вертикальных петель, вписанных в прямоугольник. Число вершин этих петель на вертикальной и горизонтальной сторонах прямоугольника равно отношению частот. Если теперь плавно изменять это отношение, увеличивая или уменьшая одну из частот, то, естественно, картина на экране будет претерпевать ряд изменений, соответствующих различным соотношениям частот. При этом количество устойчивых стационарных картинок, которые удается получить, зависит от электрических параметров прибора и обычно на небольшом интервале отношений измеряется единицами или десятками, в то время как число рациональных чисел на любом участке числовой оси равно бесконечности. Иными словами, технический прибор не чувствует разницы между иррациональными числами и рациональными, но с большими числителями и знаменателями. Но с другой стороны, при отношении частот промежуточном между двумя устойчивыми изображениями, на экране возникает сплошная «мазанка» – беспорядочное петлеобразное движение луча, не образующее какой-либо устойчивой картины. Такое изображение соответствует иррациональному отношению периодов или дроби с очень большими числителем и знаменателем.

Вообще говоря, в согласии с теорией, при плавном изменении настройки осциллографа, отношение частот бесконечное число раз проходит через все рациональные и иррациональные промежуточные значения и, подобно предыдущему порочному рассуждению, следовало ожидать, что устойчивые изображения будут встречаться как бесконечно редкие исключения, однако этого не наблюдается. Создается впечатление, что природа как бы «предпочитает» использовать в своих проявлениях числа с малыми знаменателями или не все, а лишь некоторые избранные иррациональные числа вроде $\sqrt{2}$. В данном случае возможностью получать устойчивые изображения мы обязаны тому, что любой осциллограф, как, впрочем, и любой другой физический прибор, в той или иной мере округляет свои показания. Это следствие того, что всякий прибор состоит из физических элементов – емкостей, индуктивностей, сопротивлений и т.д., всегда имеющих конечные значения своих параметров, конечное быстродействие и всегда обладающих в большей или меньшей степени инерцией или ее электрическим аналогом. Вообще это можно рассматривать как одно из проявлений обобщенного закона инерции, который утверждает, что в природе все производные всех процессов всегда конечны. Именно поэтому, в зависимости от чувствительности прибора, мы можем видеть ряд устойчивых изображений, когда отношения частот приблизительно соответствуют отношениям небольших целых чисел, и, наоборот, смазанное изображение с бесконечным числом петель, когда отношение частот оказывается близким к некоторым, но далеко не всем иррациональным числам.

Все это приводит к парадоксальному, на первый взгляд, предположению, что распределение рациональных чисел на числовой оси хотя и всюду плотно, но в то же время обладает некоторой качественной неоднородностью, которую можно трактовать как неодинаковую плотность рациональных чисел на тех или иных участках числовой оси. О том же говорит и следующий факт: известно, что существует однозначное соответствие между всеми рациональными числами вида p / q и обратными им числами вида q / p. Казалось бы, что отсюда, опираясь на то же утверждение о всюду плотном распределении рациональных чисел, должно следовать, что количества рациональных чисел на любых двух единичных отрезках числовой оси эквивалентны между собой, то есть, что, например, всеми числами отрезка от нуля до единицы можно установить однозначное соответствие со всеми числами от единицы до двух или с любым другим единичным отрезком. Однако это не так. В этом легко убедиться. Например, на отрезке 0÷1 имеется число 3/11, но на отрезке 1÷2 обратного ему числа 11/3 нет, так как это число, принадлежащее этому отрезку, имеет соответствующее ему обратное число среди чисел, расположенных между нулем и единицей. Иными словами, распределение рациональных чисел на числовой оси от нуля до единицы и от единицы до бесконечности «симметрично» относительно точки с абсциссой, равной 1. Влево от этой точки рациональные числа как бы все больше сгущаются по мере приближения к нулю, и наоборот, по мере удаления от единицы к бесконечности они встречаются все реже, сохраняя при этом способность всюду плотно заполнять числовую ось.

Отсюда уже нетрудно перейти к предположению, что рациональные числа расположены на числовой оси плотнее в окрестности рациональных дробей с малыми числителями и знаменателями и, наоборот, реже в окрестностях некоторых иррациональных чисел. Этим можно легко объяснить то, что «мазанка» на экране осциллографа или диссонанс на рояле возникают не при всех иррациональных отношениях частот, которых бесконечно много, а лишь при некоторых, как бы «избранных» по какому-то, неизвестному нам признаку.

Если предположение о неравномерном распределении рациональных чисел на числовой оси верно, то взаимодействие двух струн или вообще резонанс двух осцилляторов будет тем меньше, чем меньше плотность рациональных чисел в окрестностях той иррациональной точки числовой оси, которой соответствует отношение частот этих двух осцилляторов. И наоборот, резонанс будет усиливаться, когда это отношение приблизится к максимуму плотности.

С точки зрения феноменологической это утверждение тысячекратно проверено практикой. Принципиально новым здесь является утверждение, что резонанс определяется внутренней структурой множества рациональных чисел, тем, что это множество, несмотря на то что оно всюду плотно, на каждом конечном отрезке неоднородно по плотности.

3. Распределение рациональных чисел на числовой плоскости

Когда речь идет о распределении на числовой оси простых чисел, это распределение может быть изображено графически с исчерпывающей наглядностью – точками на прямой линии, изображающей числовую ось, или в форме графика некоторой функции – числа простых чисел, не превосходящих данное, или функции плотности – отношением числа простых чисел на данном отрезке ко всем числам отрезка.

К рациональным числам такой простой геометрический образ неприменим в силу того, что на любом отрезке числовой оси они расположены всюду плотно. Поэтому для получения наглядной картины распределения рациональных чисел приходится пользоваться иными геометрическими образами, например представлением точечной числовой плоскости Минковского. Эта числовая плоскость, или, как ее еще называют, «решетка чисел», представляет собой часть плоскости, на которой отмечены все точки, имеющие целочисленные координаты. Каждой такой точке можно приписать значение определенной дроби – рационального числа, у которого числитель p – ордината, а знаменатель q – абсцисса. Тогда на бесконечной плоскости можно получить систему точек, соответствующую всем возможным комбинациям пар целых чисел, среди них, разумеется, и всем рациональным числам.

Впервые закономерности, связанные с такими числовыми решетками, исследовал К. Гаусс, но наиболее глубокое применение и развитие они нашли в работе «Геометрия чисел» Г. Минковского, положившей начало самостоятельному разделу теории чисел того же названия. Применение такого чисто геометрического образа в абстрактной теории чисел обосновано тем, что, как заметил Г. Минковский, «некоторые предложения, почти очевидные при рассмотрении фигур в n-мерном евклидовом пространстве, имеют глубокие следствия в теории чисел» [3].

В последующем изложении мы ограничимся рассмотрением только двумерной, плоской решетки и только ее первого квадранта, а в некоторых случаях, из-за очевидной симметрии, даже только первого октанта, так как распространение полученных закономерностей на все поле рациональных чисел не представляет принципиальных затруднений.

В своих исследованиях по теории чисел различные авторы пользовались представлением только так сказать «полной» числовой решетки, то есть такой решетки, которая включает в себя все без исключения точки числовой плоскости, имеющие целочисленные координаты. Разумеется, в такой решетке точки расположены совершенно равномерно и их плотность всюду одинакова.

Если пойти несколько дальше и исключить из числовой плоскости Минковского все точки, координаты которых имеют общий делитель, отличный от единицы, то на этой плоскости останутся только собственно рациональные числа p/q или несократимые дроби. Следует особо подчеркнуть, что их распределение на плоскости однозначно определяется порядком чисел в натуральном ряде и, следовательно, является такой же объективной реальностью, как и сам натуральный ряд чисел (рис. 1).

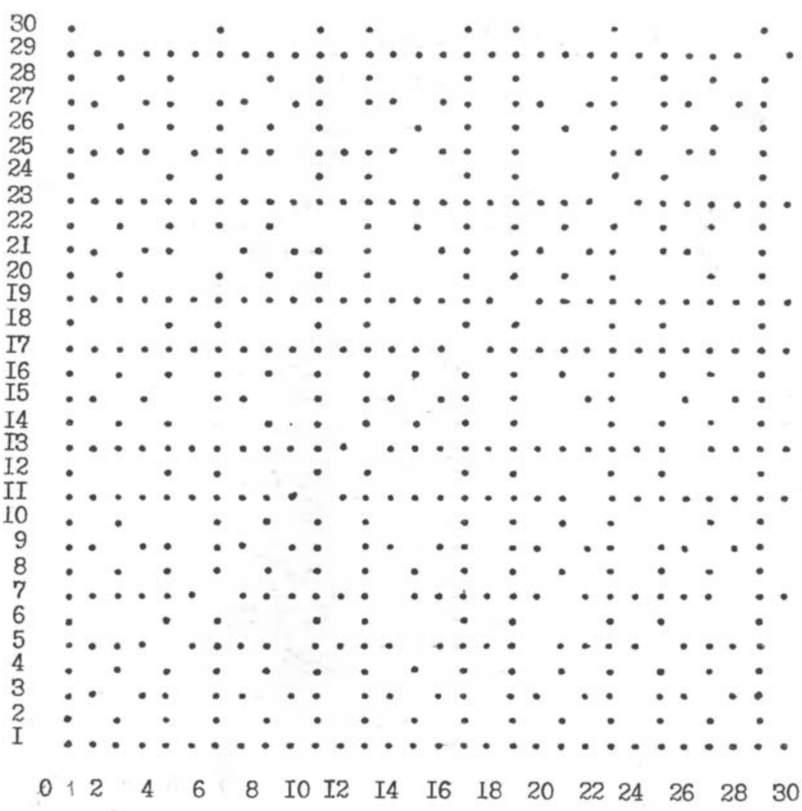


Рис. 1

Неограниченно расширяя числовую плоскость, таким способом можно обозначить положение любого рационального числа, и в этом смысле вся операция становится подобна знаменитому «решету Эратосфена», но применительно уже не к простым, а к парам взаимно простых чисел, то есть рациональным числам.

Это простейшее построение позволяет с исчерпывающей наглядностью убедиться в том, что на числовой плоскости рациональные числа распределены неравномерно. И в этой неравномерности легко просматривается связь с распределением в натуральном ряде простых чисел. В этом легко убедиться уже при одном беглом взгляде на рисунок. В тех столбцах и строках, которые соответствуют простым числам, всегда содержится наибольшее число рациональных точек. Также легко видеть, что распределение рациональных чисел на плоскости симметрично относительно прямой $y = x$. Столбцы и, соответственно, строки на отрезках, ограниченных этой прямой и одной из осей координат, по числу содержащихся в них точек равны так называемой функции Эйлера – $\varphi(m)$ – числу чисел меньших и взаимно простых с m. Это однозначно следует из условий построения числовой плоскости и позволяет сделать некоторые выводы. В частности, отсюда следует, что при неограниченном расширении числовой плоскости средняя плотность рациональных чисел, то есть отношение их числа к числу всех целочисленных точек решетки, стремится к пределу:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{Ra(N^2)}{N^2}=\lim_{N\to\infty}\frac{2}{N^2}\sum_{m=1}^{\infty}\varphi(m)=\frac{1}{\varsigma(2)}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right)^{-1}=\frac{6}{\pi^2},$$

где N – число натуральных чисел,

$Ra(N^2)$ – число рациональных чисел в квадрате со стороной,

$\varphi(m)$ – функция Эйлера,

$\varsigma(m)$ – дзета-функция Римана,

m, n – натуральные числа.

Теорему о том, что отношение числа несократимых дробей, меньших единицы, к общему числу всех возможных дробей на том же полусегменте стремится к пределу, равному $6/\pi^2$, впервые, идя совершенно иным путем, доказал Мертенс в 1874 г., то есть более чем за двадцать лет до появления первых работ Минковского по геометрии чисел. Его доказательство несколько сложнее и лишено наглядности, которую дает геометрическое представление арифметических закономерностей. В этой связи стоит заметить, что приведенное на рис. 1 построение решетки рациональных чисел с такой очевидной симметричностью относительно луча, выходящего из начала координат и проходящего через рациональное число $p/q = 1/1$, является простой и очень наглядной иллюстрацией положения об эквивалентности множества рациональных чисел отрезка $0\div1$ и всей числовой оси. На рисунке можно легко видеть, что квадрант числовой плоскости делится этим лучом на две совершенно симметричные части, из которых нижняя, правая соответствует всем числам от нуля до единицы, а верхняя левая – всем числам от единицы до бесконечности. Поэтому в частности, при последующих рассуждениях можно ограничиться только рациональными числами единичного отрезка, распространив затем полученные результаты на вторую симметричную часть числовой оси или на все рациональные числа от единицы до бесконечности.

Изображение множества рациональных чисел в форме числовой решетки дает весьма наглядное представление о неравномерности и кажущейся хаотичности их распределения на плоскости, впрочем, не более хаотичном, чем распределение простых чисел в натуральном ряде. Тем не менее это построение почти не дает никаких указаний на связь распределения рациональных чисел с явлениями резонанса. Иначе говоря, такое построение не дает в явной форме ответа на вопрос, почему только при некоторых иррациональных числах из всего бесконечного континуума наступает существенное уменьшение резонанса.

4. Качественное представление плотности распределения рациональных чисел

Под термином «плотность распределения рациональных чисел» мы понимаем отношение числа рациональных чисел с ограниченными числителями и знаменателями на конечном участке числовой плоскости к числу всех целочисленных точек этого участка; или если речь идет о числовой прямой, то отношение числа рациональных чисел с ограниченными числителями и знаменателями на данном отрезке прямой к длине этого отрезка.

Для того чтобы исследовать плотность распределения рациональных чисел на числовой оси, необходимо получить одномерное представление в виде некоторой функции распределения рациональных чисел, их относительной плотности на отрезке $0 \div 1$ числовой оси.

Разумеется, такая функция может быть определена лишь приближенно, так как, в силу бесконечности всюду плотного множества рациональных чисел, ее построение не может быть доведено до конца, сколько бы его ни продолжать. Вместе с тем из-за того, что множество рациональных чисел счетно, их плотность принципиально не может быть представлена непрерывной функцией и, следовательно, график плотности распределения рациональных чисел должен иметь ступенчатый характер, особенно заметный для чисел начала числовой плоскости, а это именно те числа, которые, насколько можно судить, играют наиболее существенную роль во всех вопросах, связанных с резонансом.

В этой связи надо заметить, что природа вообще как бы избегает излишней сложности – отношений слишком больших чисел. Природа, если можно так выразиться, предпочитает возможно более простые отношения. Подавляющее большинство известных нам веществ очень просто по своему химическому составу. Например, вода – H_2O. Кислород и водород находятся в отношении 1:2, в музыке – это октава. Чем сложнее соединение, чем большими целыми числами выражаются отношения его частей, тем, как правило, оно менее устойчиво, легче подвергается разрушению. Сложные органические соединения в космических масштабах встречаются крайне редко. Самое сложное из нам известных – Человек, даже при весьма незначительном изменении оптимальных условий быстро распадается на более простые составные части – воду, воздух, несложные соединения кальция, углерода и т.п. Непосредственная причина этого заключена в особенностях атомного строения вещества, где основную роль играют сравнительно простые отношения небольших целых чисел. Возможно, и то и другое есть проявления более общего закона природы – закона возрастания энтропии, однако это тема уже из совсем другой области. Применительно к нашему случаю эта закономерность проявляется в том, что главные свойства распределения рациональных чисел на числовой оси с наибольшей яркостью обнаруживают себя в соотношениях сравнительно небольших целых чисел начала натурального ряда.

Такие наблюдения качественного характера позволяют яснее сформулировать требования к тем методам и математическому аппарату, который может быть привлечен для построения искомой функции. Нужно получить такое отображение конечной, но наиболее характерной части множества рациональных чисел плоскости на конечный отрезок прямой, которое позволило бы судить об их плотности на этом отрезке или, что то же самое, их способности аппроксимировать расположенные между ними действительные числа. Необходимо найти такое отображение на единичный отрезок числовой оси множества рациональных чисел, меньших единицы с ограниченными знаменателями, которое позволяло бы качественно и, по возможности, наглядно судить о закономерности их распределения. Такое отображение должно в наибольшей степени выявить интересующую нас особенность распределения, связанную с явлениями резонанса и быть возможно более объективным, то есть в наименьшей степени являться отражением примененного метода построения. Простая и весьма наглядная картина получается, если развить и продолжить геометрические построения, намеченные одним из крупнейших немецких математиков начала столетия – Феликсом Клейном в его лекциях, читанных в 1907 г. в Геттингене. Клейн исходит из представления той же «решетки чисел Минковского», на которого и ссылается в своей лекции. Он рассматривает часть плоскости, на которой отмечены все целочисленные точки, независимо от того, являются ли их координаты взаимно простыми числами или нет. Его основная посылка состоит в том, что понятию действительного числа он сопоставляет не только точку на плоскости, но и луч, проведенный из начала координат через эту точку. Тогда иррациональным числам соответствуют лучи, которые на всем своем протяжении не встречают ни одной рациональной точки плоскости. В дальнейшем Клейн подходит к оценке расстояния от таких «иррациональных» лучей до ближайших к ним рациональных точек [4].

«Будем рассматривать эту сеть точек, – пишет Ф. Клейн, – из начала координат (рис. 2). Луч, идущий от начала к точке $x = a$, $y = b$, имеет уравнение $x / y = a / b$, и обратно, на каждом луче $x / y = \lambda$, где λ есть рациональное число a/b лежит бесчисленное множество целочисленных точек (ma, mb), где m есть произвольное целое число. Таким образом из точки 0 во всех возможных рациональных направлениях и только в них мы видим точки нашей решетки; поле зрения всюду плотно заполнено «звездами» (точками), но оно еще не свободно от пробелов; оно не заполнено ими непрерывно, он как бы напоминает «млечный путь». На иррациональном луче $x / y = \omega$, где ω есть число иррациональное, не лежит, следовательно, ни одна целочисленная точка – факт замечательный уже сам по себе. Но, очевидно, такого рода прямая, выражаясь терминами, напоминающими дедекиндово определение иррационального числа, производит сечение в области всех целочисленных точек; именно оно разбивает на две группы точек, расположенных справа и слева от прямой. Если мы спросим себя теперь, где же у нашего луча отделяются друг от друга эти группы, то мы придем к чрезвычайно интересному свойству разложения числа ω в цепную дробь. Именно, если мы отметим точки $x = p_2$, $y = q_2$, соответствующие каждой подходящей дроби p_2 / q_2 в разложении числа ω, (p_2 и q_2 суть числа взаимно-простые между собой), то лучи, идущие к этим точкам, должны все ближе и ближе подходить к лучу $x / y = \omega$, и при том попеременно, то с одной то с другой стороны; это приближение должно происходить с такой же быстротой, с какой дробь p_2 / q_2 приближается к иррациональному числу ω». «Представим себе, – пишет далее Клейн, – что во все целочисленные точки воткнуты штифтики или булавки, как на китайском бильярде. Каждую из двух групп булавок, расположенных справа и слева от луча $x / y = \omega$, мы обведем нитью; если мы натянем каждую нить так, чтобы она охватывала соответствующую группу булавок и прилегала вплотную к ближайшим, то она примет форму выпуклой ломаной линии; вершинами этой ломаной именно и будут служить точки p_2, q_2, координатами которых служат соответствующие числители и знаменатели подходящих дробей; при этом слева будут лежать точки, отвечающие четным подходящим дробям, а справа – нечетным. Этим путем мы приходим к новому и, нужно сказать, чрезвычайно наглядному геометрическому определению разложения числа в непрерывную дробь» [4].

Это построение Ф. Клейна приведено на рис. 2.

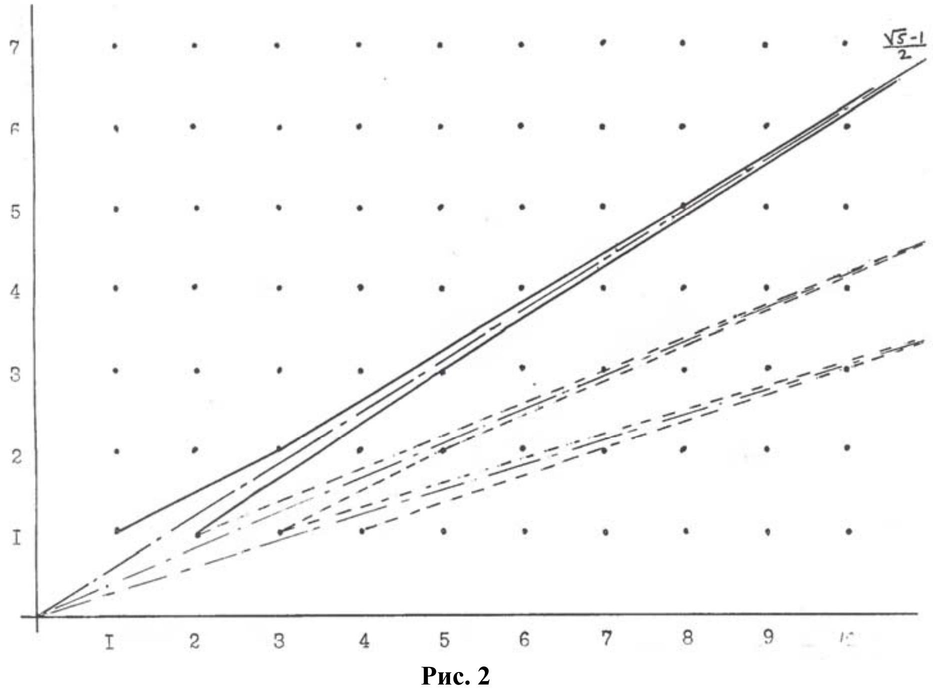


Рис. 2

Клейн ограничивается единственным примером – иррациональным числом $(\sqrt{5}-1)/2$. Луч, изображающий это число, проходит между числами 1 и ½, затем между числами 2/3 и 3/5, 5/8 и 8/13 и т.д. Заметим, что числа 1, 2, 3, 5, 8, 13, … – это известный еще со времен средневековья «ряд Фибоначчи», закономерность, которой подчиняется и рост ветвей на дереве, и размножение кроликов, и образование чешуек на кедровой шишке, и расположение зерен в головке подсолнуха и многие другие природные явления. К вопросу о тесной связи этого ряда с распределением рациональных чисел мы вернемся несколько позже, а сейчас, действуя чисто эмпирическим путем, то есть попросту ощупью пробираясь между рациональными точками плоскости, построим аналогичную фигуру для какого-то иррационального числа, расположенного между ½ и 1/3. Будем искать такое положение иррационального луча, которое отвечало бы условию быть одновременно наиболее удаленным от всех ближайших к нему рациональных точек, начиная с пары точек 1/2 и 1/3.

С помощью предложенного Клейном способа такое построение можно осуществить для ближайших к началу координат двух-трех десятков точек и для лучей, проходящих соответственно между 1/4 и 1/5. Конечно, теоретически мы можем продолжать этот процесс бесконечно и распространить его не только на единственное иррациональное число в интервале $1/n$, $1/(n+1)$, но и вообще на любые иррациональные числа, хотя, как пишет сам Клейн, например, для числа π «нанести соответствующую фигуру на чертеже было бы довольно трудно…». Но дело здесь не в возможности или невозможности нанести ту или иную фигуру на чертеж, а в том, что этот наглядный образ позволяет качественно оценить характер приближения иррациональных чисел рациональными и, вероятно, именно этими соображениями руководствовался прежде всего такой тонкий математик, как автор знаменитой эрлангенской программы. В частности, если исключить из числовой решетки сократимые дроби (Клейн этого не сделал) и построить наилучшие приближения для нескольких иррациональных лучей, то становится совершенно очевидно, что пространство, свободное от рациональных точек в окрестностях различных иррациональностей, различно по площади. Странно, что Клейн, подойдя вплотную к этому наблюдению, не заметил его и направил свое внимание в другую сторону. Это свойство распределения чисел на площади можно трактовать и называть по-разному; можно, например, говорить, что разные иррациональности по-разному могут быть аппроксимированы рациональными числами – такой терминологией пользуется А.Я. Хинчин, рассматривая вопрос приближения действительных чисел цепными дробями; можно сравнивать между собой площади, свободные от рациональных точек около того или иного луча, можно, наконец, говорить о плотности рациональных чисел в той или иной области числовой плоскости или числовой оси. В дальнейшем мы придерживаемся именно такой терминологии, потому что она шире частной задачи аппроксимации и лучше отражает существо тех физических процессов, которые рассматриваются в этой связи.

Существенным недостатком построения Клейна, при всей его образной выразительности, является то, что, идя этим путем, весьма трудно продвинуться дальше простейших качественных наблюдений. Если мы начали говорить о плотности рациональных чисел на числовой оси, то, естественно, хотелось бы иметь это утверждение в виде какой-то функции, представляющей в явном виде характер изменения плотности при переходе от одной к другой точкам числовой оси. Вопрос этот не так прост, как может показаться, и, как уже упоминалось выше, даже сама возможность его постановки, на первый взгляд, может вызвать возражения, основанные на том, что множество рациональных чисел всюду плотно.

В предшествующих построениях мы принимали «решетку чисел» Гаусса–Минковского как нечто данное, заранее уже существующее, и затем только вычеркивали из нее все дроби, которые можно сократить, оставляя лишь собственно рациональные числа.

Такой способ «вычеркивания лишнего» – это, так сказать, обратный, негативный путь построения функции, подобный тому, которым пользовался Эратосфен для отыскания всех простых чисел. Путь надежный, но не лучший.

Другой метод построения решетки рациональных чисел может быть основан на том, чтобы из начала координат провести лучи через все рациональные точки и таким путем разбить множество целочисленных точек решетки на непересекающиеся классы эквивалентности, соответствующие всем рациональным числам p/q. Разумеется, на каждом таком луче или в каждом классе эквивалентности будут содержаться все дроби вида np/nq, эквивалентные простейшему первому элементу в данном классе – рациональному числу p/q.

Очевидно, что как число всех классов, равное числу всех рациональных чисел, так и число эквивалентных дробей в каждом классе бесконечно и счетно. Однако здесь мы встречаемся с одним из парадоксов распределения рациональных чисел: оказывается, что, несмотря на то что в каждом классе эквивалентности сократимых дробей бесконечно много, их общее число все же меньше числа самих классов! И более того, отношение числа эквивалентных дробей во всех классах к числу самих классов стремится к некоторой постоянной величине, меньшей единицы.

Если Ra – число классов эквивалентности или, что то же самое, число рациональных чисел, то число эквивалентных, сократимых дробей $D(np/nq)$ во всех этих классах равно:

$$\lim_{n\to\infty} D\left(\frac{np}{nq}\right) = Ra\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right) \approx 0.64493\ldots Ra,$$

что непосредственно следует из применения функции Эйлера и теоремы Мертенса.

Этот парадокс, в результате которого произведение оказывается меньше одного из сомножителей, легко разъясняется тем, что в данном случае при расширении числовой плоскости число классов эквивалентности растет гораздо быстрее, чем число элементов каждого класса. Это хорошо видно на таком примере: если рассматривать произвольный квадрат числовой плоскости со стороной N и вершиной в начале координат, то можно видеть, что для всех рациональных чисел, у которых числитель или знаменатель больше $N/2$; второй, следующий в своем классе элемент, лежит уже за пределами рассматриваемого квадрата. Легко видеть также, что числа, у которых числитель или знаменатель равны или меньше $N/2$, составляют приблизительно одну четверть общего числа рациональных чисел всего квадрата со стороной N. Это значит, что приблизительно три четверти всех рациональных чисел в произвольном квадрате являются единственными представителями в своем классе эквивалентности и такое соотношение сохранится, как бы ни увеличивались размеры рассматриваемого нами квадрата.

5. Представление чисел цепными дробями

Разбиение на классы эквивалентности множества целочисленных точек решетки, хотя и позволяет обнаружить некоторые интересные зависимости, не дает непосредственного пути для построения одномерного представления распределения рациональных чисел на прямой. Для этого прежде всего необходимо выбрать такой математический аппарат, который позволял бы автоматически получать все рациональные числа и только рациональные числа. Таким универсальным аппаратом в данном случае являются цепные дроби.

Есть три способа записи рациональных чисел. Они могут изображаться обычными, систематическими или цепными дробями. В различных случаях отдается предпочтение тем или другим, в зависимости от конкретных условий и того результата, которого хотят достигнуть. Но, как пишет А.Я. Хинчин, «в то время как всякая систематическая дробь связана с определенной системой счисления и потому неизбежно отражает в себе не столько абсолютные свойства изображаемого ею числа, сколько его взаимоотношение именно с этой выбранной системой счисления, цепные дроби ни с какой системой счисления не связаны и в чистом виде воспроизводят свойства изображаемых ими чисел…», и далее: «Аппарат цепных дробей, в известном смысле, обладает свойством наилучших приближений…», поэтому «в теоретических исследованиях при изучении арифметических законов континуума и арифметических свойств отдельных иррациональностей он находит себе преимущественное применение и является наилучшим и незаменимым орудием этого рода исследований» [5].

Обычные дроби, так же как и систематические, могут изображать как рациональные числа, так и любые другие числа в том же классе эквивалентности. По виду такой дроби нельзя сразу сказать – может ли она быть сокращена.

Исключительным свойством цепных дробей является то, что они изображают отношения только взаимно простых чисел или собственно рациональные числа. Какое бы число из данного класса эквивалентности мы ни взяли, – его запись посредством цепной дроби будет совершенно идентичной, единственной для всех чисел данного класса.

Последнее положение теории цепных дробей имеет в данном случае особое практическое значение, так как из него следует, что если для построения «решетки чисел» мы будем пользоваться не обычными или систематическими дробями, а только конечными цепными дробями, то мы автоматически получим на числовой плоскости, а затем и на числовой оси только рациональные числа, знаменатели и числители которых не превосходят заданного значения. Аппарат цепных дробей выполнит здесь роль того «Эратосфенова решета», через которое мы отсеем все сократимые дроби и оставим только рациональные числа.

Цепные дроби весьма специфический раздел арифметики и, несмотря на его достоинства, редко встречающийся на практике из-за крайней сложности, а подчас и невозможности выполнения даже простейших арифметических действий. Поэтому напомним, что в дальнейшем мы будем называть *n*-членной цепной дробью α выражение

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 \pm \cfrac{1}{a_2 \pm \cfrac{1}{a_3 \pm \cfrac{1}{\begin{matrix}\cdots\cdots\cdots \\ \pm \cfrac{1}{a_n}\end{matrix}}}}} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Числа a_n будем называть членами или элементами цепной дроби порядка n, а обычную дробь $\frac{p_n}{q_n}$ – подходящей дробью порядка n. Назовем также «порядком приближения» порядок или число элементов той конечной дроби, которую мы в данном случае используем, считая приближением первого порядка цепную дробь, состоящую из одного элемента: $\frac{1}{n}$.

С учетом этих замечаний можно приступить к построению решетки положительных рациональных чисел, которая будет получена уже не путем «вычеркивания лишнего», а посредством конструктивного процесса, формирующего множество рациональных чисел как вполне упорядоченное множество вполне упорядоченных множеств, выстроенных в однозначно определенную систему.

Может возникнуть естественный вопрос: не все ли равно – каким путем получается «решетка чисел» – система рациональных точек на числовой плоскости, если в конечном итоге получается одно и то же?

Но дело в том, что это «одно и тоже» получается лишь в том случае, если процесс построения доведен до бесконечности, что практически невозможно. В действительности мы в подобном построении всегда имеем дело лишь с конечными величинами – в первом случае с геометрически ограниченной частью числовой плоскости, а во втором – с конечной частью множества рациональных чисел, ограниченной условием аппроксимации. А это различие приводит к заметной разнице в результатах на любом конечном этапе построения. Вычеркивая лишние точки на ограниченной площади, мы заведомо рассматривали только конкретный частный случай, тогда как ограничение порядка приближения сохраняет свой смысл и значение на всем бесконечном множестве рациональных чисел.

Построение решетки начнем с того, что на бесконечной числовой плоскости нанесем числа первого порядка приближения. Они займут одну строку с ординатой $y = p = 1$ и абсциссами $x = q_1 = n$, соответствующими числам натурального ряда. При этом, так как в данном случае ограничивающим условием служит не размер площади, а порядок приближения, то есть число членов цепной дроби, не имеет существенного значения – на каком числе n будет остановлено построение – это повлияет лишь на убедительность и наглядность схемы. На рис. 3 числа первого порядка приближения обозначены кружками.

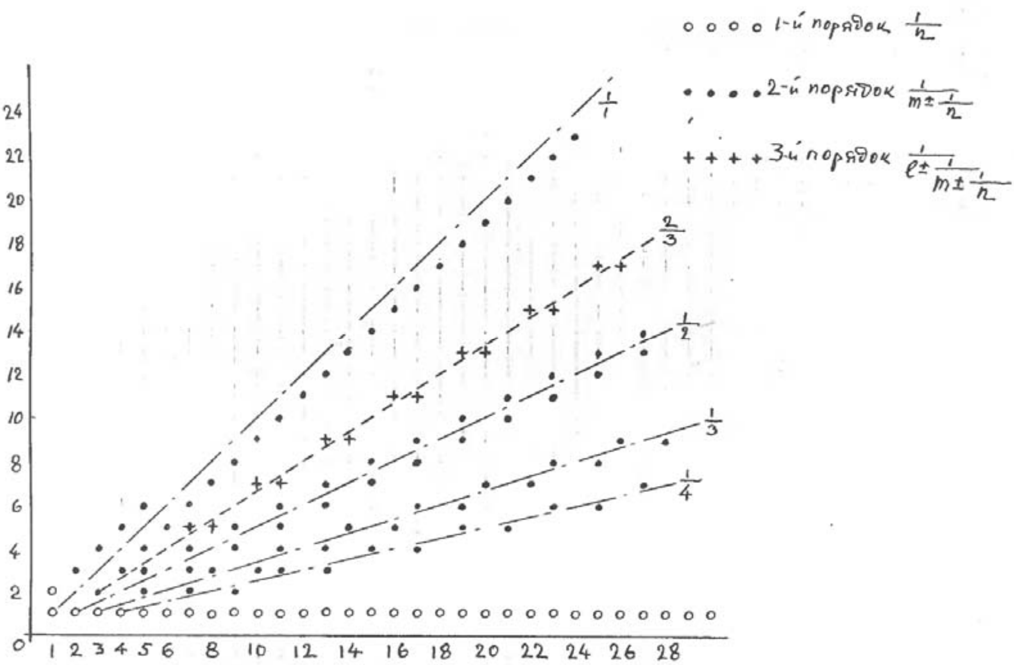


Рис. 3. Построение решетки рациональных чисел на основе цепных дробей

Как уже говорилось ранее, основываясь на симметрии расположения рациональных точек на плоскости относительно прямой $y = x$, мы будем в дальнейшем рассматривать лишь первый октант плоскости, то есть ту ее часть, которая ограничена положительным значением оси и прямой $y = x$.

Следующим шагом – приближением второго порядка – должно стать нанесение всех чисел, которые могут быть записаны двухзвенной цепной дробью:

$$\frac{1}{m+\frac{1}{n}}=\frac{p_2}{q_2}=\frac{n}{mn\pm1},\ m,n=1,2,3,\dots .$$

На рис. 3 эти числа обозначены точками.

На следующем этапе для каждого из чисел второго порядка могут быть построены аналогичные приближения третьего порядка с помощью трехзвенных цепных дробей:

$$\frac{1}{l\pm\frac{1}{m\pm\frac{1}{n}}}=\frac{mn\pm1}{l(mn\pm1)\pm n}=\frac{p_3}{q_3},\quad l,m,n=1,2,3,\dots .$$

На рис. 4 крестиками показано такое приближение только для одного числа 2/3, но это сделано исключительно для того, чтобы не перегружать чертеж. Вообще же, такие приближения должны быть построены для каждого рационального числа предшествующего порядка.

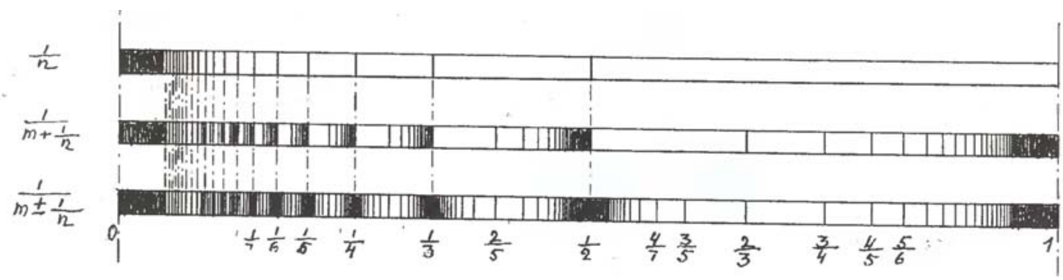


Рис. 4. Последовательные этапы построения рациональных точек второго порядка на числовой прямой

Очевидно, что для каждой из полученных таким путем рациональных точек k-порядка можно построить аналогичные последовательности $k + 1$-го и более высоких порядков, охватывая таким образом все множество рациональных чисел.

Однако некоторые существенные замечания можно и удобнее сделать уже на самых начальных этапах построения решетки. Так, легко видеть, что рациональные числа второго порядка приближения вида

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{m\pm\frac{1}{n}}$$

все располагаются на прямых, параллельных лучам, проведенным из начала координат через точки $1/n$, соответствующие всем числам первого порядка.

Далее, между двумя рядами рациональных точек второго порядка не встречается больше ни одной другой рациональной точки, или, иными словами, – числа второго порядка являются наилучшими приближениями расположенного между ними числа первого порядка. Под термином «наилучшее приближение» понимается условие, что ни одна другая дробь a/b, знаменатель которой $b \le q$, не расположена на числовой оси ближе к числу α, чем дробь p/q, то есть имеет место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|,\ b \le q.$$

Согласно теории цепных дробей абсолютное значение разности двух подходящих дробей последовательных порядков приближения всегда равно обратной величине произведения знаменателей этих дробей:

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Последнее соотношение показывает, что, приняв за систематизирующее начало аппарат цепных дробей, мы получили, в известном смысле, экстремальный результат, который уже не может быть улучшен: систему последовательных наилучших приближений действительных чисел посредством рациональных; бесконечное множество вполне упорядоченных множеств, где каждый элемент является наилучшим, при данном знаменателе, приближением последующего и где для каждого элемента все ему предшествующие в его ряду являются его наилучшими приближениями.

Такая система построения последовательных приближений позволяет внести в расположение на плоскости рациональных чисел однозначно определенный порядок, выстроить их в некоторую последовательность, хотя и не такую простую, как ряд натуральных чисел, но столь же определенную и столь же экстремальную. Это проявляется уже в том, что подобно тому как между двумя последовательными числами натурального ряда нельзя вставить промежуточного, так и в этом случае – между двумя рациональными числами – последовательными приближениями данного действительного числа не может быть помещено ни одно другое рациональное число с тем же или меньшим знаменателем. Это образует вполне упорядоченную систему с экстремальной разностью между своими элементами. В таком построении множество рациональных чисел, сохраняя свойство плотности на бесконечности, в то же время на любом конечном подмножестве имеет однозначно определенную структуру из конечных интервалов.

Все сказанное относительно рациональных чисел первых двух порядков может быть распространено на числа более высоких порядков, однако следует заметить, что значительное число физических явлений, особенно связанных с резонансом, определяется распределением на числовой оси рациональных чисел именно первого и второго порядков, что соответствует распределению точек в самом начале числовой плоскости, примыкающем к началу координат. Именно их распределение играет наиболее заметную роль в окружающей нас действительности.

Рациональные числа следующих, более высоких, порядков строятся по той же схеме, то есть к k-звенной дроби добавляется следующий $k + 1$-й элемент. По мере того как все члены цепной дроби принимают значения всех целых чисел на числовой плоскости выстраиваются последовательности наилучших приближений всех рациональных чисел предшествующего порядка.

6. Построение функции плотности на числовой оси

После того как определен порядок построения рациональных чисел на плоскости, уже не представляет затруднений найти их распределение на числовой оси. Для этого сперва отметим на единичном отрезке все точки первого порядка, то есть числа вида $1/n$. Затем в каждом из полученных интервалов числовой оси нанесем точки, соответствующие числам второго порядка, то есть двухзвенным цепным дробям вида

$$x = \frac{1}{m \pm \frac{1}{n}}, \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots .$$

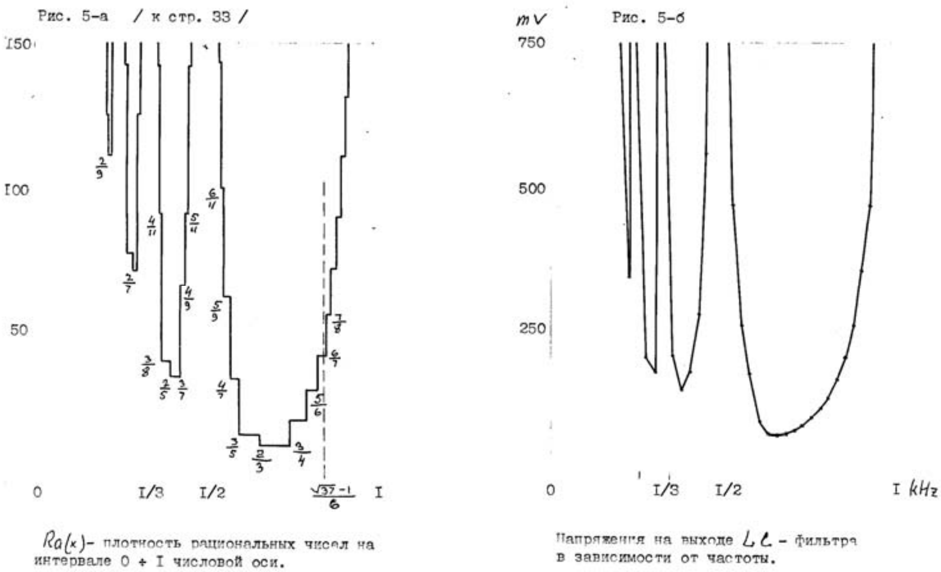
Такое построение показано на рис. 4, где на этом рисунке можно хорошо видеть сгущения рациональных штрихов вблизи чисел первого порядка и, наоборот, разрежения в промежутках между ними. Такое простейшее построение уже выявляет главные черты распределения рациональных чисел на числовой прямой и помогает объяснить многие примеры взаимодействия резонирующих колебательных систем. Подобно тому как резонанс сильнее всего проявляется при отношениях частот, выражаемых малыми целыми числами, так и в данном случае – связь между распределением рациональных чисел и взаимодействием колебательных систем проявляет себя ярче всего при малых порядках приближения. Построение приближений более высоких порядков не меняет положения на числовой оси главных экстремумов предыдущего порядка, но лишь прибавляет новые максимумы вблизи всех рациональных точек предшествующего порядка и минимумы в промежутках между ними.

Для получения наглядного графического изображения функции распределения или плотности рациональных чисел на числовой оси в форме обычного графика определим эту функцию, разумеется, при конечном, а в данном случае – при втором порядке приближения как величину, обратную расстоянию между двумя соседними рациональными точками прямой (рис. 5*а*):

$$Ra(x) = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right|^{-1}.$$

Рядом для сравнения помещен тот же график, приведенный к тому же масштабу, но полученный совершенно иным, чисто эмпирическим путем. Это запись показаний вольтметра на выходе активного резонансного усилителя, на вход которого подавался сигнал постоянного напряжения и меняющейся частоты. Синусоидальные колебания электрического напряжения от генератора частоты подавались на активный LC-фильтр, имеющий достаточно четко фиксированный максимум пропускания один килогерц и добротность Q = 17.

Частота на входе изменялась от 200 до 1000 Гц через интервалы 25 Гц. Взято среднее значение при двух режимах входного сигнала – 0,75 и 1,25 В.



а *б*

Рис. 5. $Ra(x)$ **– плотность рациональных чисел на интервале 0÷1 числовой оси (*а*); напряжение на выходе LC-фильтра в зависимости от частоты (*б*)**

Оба графика обнаруживают большое сходство, хотя получены совершенно различными путями. В обоих случаях можно видеть ясно выраженные минимумы, совпадающие по своему численному значению в обоих графиках, и максимумы, уходящие за пределы чертежа в точках, соответствующих рациональным числам первого порядка, то есть числам 1/1, 1/2, 1/3 и т.д. То, что в первом графике максимумы совпадают с этими числами, – совершенно естественно, так как вытекает из условий построения. Что же касается совпадающих с этими же числами пиков резонанса, то этот опытный факт просто иллюстрирует давно известное физическое явление и сам по себе не содержит чего-либо нового. Наше внимание в данном случае обращено в некотором смысле на противоположную сторону явления – не на максимумы функции, а на ее минимумы, на их положение на числовой оси. Наша задача теперь состоит в том, чтобы выяснить особенности поведения колебательных систем в тех случаях, когда отношение их частот соответствует не максимумам плотности или отношению целых чисел – это хорошо изучено, а, наоборот, минимумам плотности рациональных чисел на числовой прямой, соответствующих наименьшему резонансу колебательных систем. Вопрос можно даже поставить так: каким именно действительным числам должны соответствовать отношения частот, чтобы резонанс был минимальным?

Такой вопрос отнюдь не тривиален, а обычный ответ на него, что «это должны быть иррациональные числа» в сущности лишен содержания, потому что вблизи максимума резонанса есть сколь угодно иррациональных чисел, однако при таком отношении частот, как видно из графика на рис. 5*б*, система ведет себя так, словно все эти числа рациональные.

Из рассмотрения графиков на рис. 5 и построения по способу Клейна на рис. 2 видно, что минимумы плотности и резонанса расположены несимметрично относительно ближайших максимумов плотности рациональных чисел. То же следует и из чисто теоретических положений теории колебаний, устанавливающих несимметричную форму амплитудно-частотной характеристики при резонансе. Эти минимумы плотности функции $Ra(x)$, обозначаемые в дальнейшем для краткости M_n, очевидно, должны лежать в интервалах, ограниченных подходящими дробями все более высоких порядков. Так, путем весьма громоздкого построения можно было бы найти приближенные значения этих минимумов плотности рациональных чисел. Но есть и более простой путь, дающий решение в общем виде.

Из теории цепных дробей следует, что эти минимумы должны быть числами, хуже других аппроксимируемыми посредством рациональных. Известно, что среди всех действительных чисел лучше всего могут быть аппроксимированы числа трансцендентные, возможность аппроксимации которых посредством рациональных приближений ничем не ограничена.

Возможность аппроксимации чисел алгебраических ограничена в том смысле, что они могут быть аппроксимированы тем хуже, чем меньше степень изображающего их многочлена, поэтому, в частности, хуже всех алгебраических чисел могут быть аппроксимированы квадратичные иррациональности. Поэтому если мы ставим себе задачу отыскать значения минимумов плотности рациональных чисел, или, что практически то же самое, минимумы их способности аппроксимировать некоторые действительные числа, то мы должны искать эти числа среди квадратичных иррациональностей, то есть среди чисел α, отвечающих условию

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{-q}{p+\alpha},$$

где p и q – целые.

Полагая $q = -1$, получаем для α выражение

$$\alpha = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{....}}}},$$

то есть приведенные на рис. 5*а* минимумы плотности рациональных чисел на числовой оси, при втором порядке приближения, должны выражаться периодическими цепными дробями, у которых все элементы равны между собой.

Полагая в квадратном уравнении $p = 1, 2, 3, \ldots$, получим следующие значения минимумов плотности рациональных чисел на числовой оси:

$$p_1 = 1;\; M_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}} \approx 0.6180339...;$$

$$p_2 = 2;\; M_2 = \frac{\sqrt{8}-2}{2} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}} \approx 0.4142135...;$$

$$p_3 = 3;\; M_3 = \frac{\sqrt{13}-3}{2} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\dots}} \approx 0.30277...$$

и вообще:

$$p_n = n;\; M_n = \frac{\sqrt{n^2+4}-n}{2} = \cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n+\dots}}}.$$

Здесь приведены только положительные значения корня, так как, вследствие того что в принятом нами квадратном уравнении свободный член q равен -1, второй сопряженный корень уравнения во всех случаях равен обратной величине первого, взятой с обратным знаком, дробные части их совпадают, а целые или равны нулю – для положительного значения корня, или – р – для отрицательного. Поэтому положительные значения корней дают минимумы плотности рациональных чисел на отрезке числовой оси от нуля до единицы, а абсолютные значения отрицательных корней – аналогичные минимумы на участке числовой оси от единицы до бесконечности.

Полученные таким путем значения минимумов плотности рациональных чисел на числовой прямой соответствуют тем значениям минимумов плотности, которые были получены путем графического построения функции второго порядка приближения и минимумам резонанса, полученного экспериментально. При этом следует учитывать, что, ограничивая построение функции конечным числом элементов цепной дроби, в данном случае – двумя, мы обязательно вносим ошибку, которая тем меньше, чем больше порядок приближения и которая попеременно меняет знак, давая на графике значение минимума то с избытком, то с недостачей, в зависимости от того, четный или нечетный порядок приближения. Приведенные же выше точные значения минимумов плотности при графическом построении могут быть достигнуты лишь в пределе, при бесконечном числе порядков приближения.

7. «Золотое сечение» и «Закон планетных расстояний»

Из теории цепных дробей известно, что бесконечная цепная дробь, оборванная на конечном числе членов, тем хуже аппроксимирует иррациональное число α, чем меньше следующий $(k + 1)$-й элемент. Поэтому ни одно число не может быть аппроксимировано хуже, чем число

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}.$$

Образно говоря, это число «самое иррациональное» среди всех иррациональностей, если под «иррациональностью» понимать трудность аппроксимации. Этому же числу соответствует абсолютный минимум плотности на графике (рис. 5*а*) и абсолютный минимум резонанса, полученный экспериментально. При сложении двух гармонических колебаний их сумма в среднем наиболее далека от периодичности, наиболее диссонантна, если отношение периодов слагаемых функций выражается этим числом.

$1:\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ – это знаменитое «золотое сечение», известное уже с глубокой древности и выводимое чисто геометрически из совершенно иных предположений. Эта пропорция лежит в основе многих архитектурных сооружений. Считается, и не без оснований, что она представляется людям наиболее гармоничной, приятной для глаза. Изучению этой пропорции много внимания уделял Леонардо да Винчи.

На протяжении тысячелетий эта пропорция воспринималась людьми, прежде всего, как чисто эстетическая категория, и обнаруженная связь этого отношения с распределением рациональных чисел на числовой прямой дает повод к некоторым дальнейшим обобщениям из области физики, астрономии и физиологии, где связь теории чисел и теории колебаний выступает в наиболее ясной форме.

Одним из таких примеров является наша Солнечная система, ее устойчивость во времени и пространстве. Как известно, в силу взаимного притяжения планет их орбиты подвержены изменениям, которые становятся особенно существенными, когда планеты выстраиваются почти в одну линию, как это было в начале 1982 г. Ясно, что если такая, слишком упорядоченная, конфигурация будет периодически повторяться, то это окажет систематическое влияние на орбиты планет и поведет к дальнейшей деформации всей системы, возникнет катастрофический резонанс. Однако этого не происходит, так как отношения периодов выражаются иррациональными числами. Поэтому однажды образовавшееся взаимное расположение планет уже никогда, ни в прошлом, ни в будущем, не может в точности повториться. Это установил еще в XVIII в. Лаплас. Но ни он, ни другие исследователи не дали ответа на вопрос – почему планеты имеют такие, а не какие-либо другие, хотя бы и иррациональные, периоды обращения и расстояния от Солнца. Таких попыток было сделано немало, начиная от «гармонии сфер» Пифагора и стереометрических построений Кеплера до гипотезы О.Ю. Шмидта о происхождении Солнечной системы. Кроме того, и сам априорный вывод о возможности катастрофического резонанса был бы справедлив лишь в том случае, если бы в результате первичной деформации система могла снова приходить только в резонансные состояния, хотя бы и с другими, но обязательно рациональными отношениями периодов обращения отдельных планет. Такой вариант развития событий нельзя исключить, но вероятность его по ряду очевидных причин крайне мала.

Если рассматривать этот вопрос с позиций теории чисел, исходя из представлений о неравномерном распределении рациональных чисел на числовой прямой, и связи этого распределения с явлениями резонанса, то следует ожидать, что в результате внутреннего взаимодействия системы, при произвольном начальном отношении периодов, средние расстояния планет от Солнца и, следовательно, периоды их обращения будут в процессе длительного взаимодействия непрерывно деформироваться. При этом произвольное начальное распределение параметров кеплеровских орбит должно быть ограничено лишь весьма общими условиями приблизительной компланарности, малых эксцентриситетов и не слишком больших отношений периодов, при которых взаимодействие было бы исчезающе мало. Изменение параметров планетных орбит должно происходить тем быстрее, чем ближе в «начальный» момент времени их периоды были в положении «острого» резонанса. Под термином «острый резонанс» в исследованиях по небесной механике понимают обычно такое отношение периодов обращения планет или спутников, которое выражается отношением сравнительно малых чисел начала натурального ряда.

Вообще, при любой деформации орбит, а она неизбежна даже и в том случае, если отношения периодов весьма далеки от острого резонанса, средние расстояния и периоды обращения будут бесконечное число раз оказываться как в рациональных, так и иррациональных отношениях. Поэтому слова о том, что отношения периодов вообще рациональны или, наоборот, иррациональны, лишены всякого конкретного смысла. Можно говорить лишь о большей или меньшей вероятности того, что в данный момент времени орбиты планет окажутся в том или ином рациональном или иррациональном отношении. А такая вероятность, как это следует из всего предыдущего, целиком определяется плотностью рациональных чисел на числовой оси. Отсюда следует, что параметры орбит должны претерпевать малые возмущения до тех пор, пока отношения периодов не примут значения ближайших минимумов плотности рациональных чисел. Тогда влияние систематических возмущений станет минимальным, вся система в целом придет к состоянию с относительно наименьшим резонансом и приобретет наибольшую устойчивость во времени. Это будет достигнуто тогда, когда периоды обращения планет будут пропорциональны корням приведенного выше квадратного уравнения.

О том, в какой мере Солнечная планетная система согласуется с этими условиями, можно судить по табл. 1, в которой приведены сравнительные данные об отношениях периодов обращения планет и их средних расстояний от Солнца. Так как высказанное предположение о том, что отношения периодов должны соответствовать тем или иным минимумам плотности рациональных чисел, носит чисто качественный характер и так как средние расстояния и периоды находятся между собой в функциональной зависимости, то высказанное предположение полностью применимо и к отношениям средних расстояний планет от Солнца. В последнем случае хотя и получается несколько меньше средняя точность (3% вместо 0,5% в первом случае), но зато приходится иметь дело с меньшими по абсолютной величине коэффициентами и благодаря этому обнаруживается простая закономерность возрастания этого коэффициента – ряд нечетных чисел.

Таблица 1

Фактические периоды обращения и радиусы орбит планет Солнечной системы в сравнении с вычисленными

Планета	Периоды обращения				Радиусы орбит			
	Факт.	Расч.	p_n	Расч./ Фактич.	Факт.	Расч.	p_n	Расч./ Фактич.
Меркурий	0.0203	0.0203	-49	1.0000	0.0744	0.0765	-13	1.0232
Венера	0.0519	0.0524	-19	1.0096	0.1390	0.1401	-7	1.0079
Земля	0.0843	0.0828	-12	0.9822	0.1922	0.1926	-5	1.0021
Марс	0.1586	0.1623	-6	1.0233	0.2929	0.3028	-3	1.0338
Астероиды	0.4877	0.4142	-2	0.8493	0.6180	0.6180	-1	1.0000
Юпитер	1.0000	1.0000	0	1.0000	1.0000	1.0000	0	1.0000
Сатурн	2.4834	2.4142	2	0.9721	1.8334	1.6180	1	0.8825
Уран	7.0827	7.1378	7	1.0077	3.6883	3.3028	3	0.8955
Нептун	13.8922	14.0711	13	1.0129	5.7774	5.1926	5	0.8938
Плутон	21.1166	21.0475	21	0.9967	7.6398	7.1401	7	0.9346
Среднее значение расч./факт.				0.9951	0.9638			
Средняя ошибка				0.0049	0.0317			

Примечание. За единицу принята орбита Юпитера. Для астероидов принята одна условная орбита, соответствующая наиболее часто встречающемуся периоду – 5.75 года и расстоянию – 3.215 а.е.

Совершенно такие же соотношения периодов или их функций – средних расстояний – и минимумов плотности рациональных чисел получается и для других подобных колебательных систем. В табл. 2 и 3 приведены аналогичные данные для спутников Юпитера и Сатурна – отношения их средних расстояний с еще большей точностью соответствуют минимумам плотности рациональных чисел. В этой связи весьма убедительный пример представляют собой кольца Сатурна. Как известно, они разделены темными промежутками, где «почти полностью отсутствует материя», из которой составлены кольца. Наиболее широкий просвет – так называемая «щель Кассини» имеет ширину около 4000 км и простирается приблизительно от 116 до 120 тысяч километров, считая от центра планеты. Этот промежуток находится в простых кратных отношениях к средним расстояниям ближайших спутников Сатурна. Они, создавая периодически повторяющиеся возмущения, как бы «выметают» из этой зоны кольца мелкие материальные частицы, и, наоборот, в других областях кольца, находящихся в иррациональных отношениях к орбитам ближайших спутников Сатурна, материя, из которой состоят кольца, может сохранять устойчивое орбитальное движение. (Ширина колец такова, что было бы бессмысленно подыскивать для них иррациональные отношения к орбитам спутников. Для этого у нас еще нет достаточно подробных и точных наблюдательных данных.) Материалы, касающиеся просветов в кольцах Сатурна и их отношения к средним расстояниям ближайших спутников, приведены в табл. 4.

Таблица 2

Фактические и расчетные относительные радиусы орбит Галилеевых спутников Юпитера

Радиусы орбит				
Спутник	**Фактич.**	**Расчетн.**	**Факт./Расч.**	***p***
V	0.0963	0.0990	0.9724	-10
I	0.2245	0.2360	0.9513	-4
II	0.3569	0.3027	1.1790	-3
III	0.5691	0.6180	0.9208	-1
IV	1.0000	1.0000	1.0000	0
		Среднее	1.0047	
		Средняя ошибка	0.0047	

Примечание. За единицу принята орбита четвертого спутника

Таблица 3

Фактические и расчетные средние расстояния – радиусы орбит внутренних спутников Сатурна

Радиусы орбит				
Спутник	**Фактич.**	**Расчетн.**	**Факт./Расч.**	***p***
Титан	1.0000	1.0000	1.0000	0
Рея	0.4317	0.4142	1.0423	-2
Дисна	0.3091	0.3027	1.0211	-3
Тефия	0.2412	0.2361	1.0216	-4
Энцелад	0.1946	0.1926	1.0103	-5
Мимас	0.1521	0.1622	0.9377	-6
Янус	0.1308	0.1401	0.9336	-7
		Среднее	0.9952	
		Средняя ошибка	0.0048	

Примечание. За единицу принята орбита спутника Титан.

Таблица 4

Отношение радиусов просветов в кольцах Сатурна к радиусам орбит ближайших спутников

Спутник	«Просвет Кассини»	«Просвет Энке»
Янус	3/4	5/9
Мимас	5/8	1/2
Энцелад	1/2	3/8
Тефия	2/5	3/10

Примечание. Разрывы в кольцах соответствуют простым рациональным отношениям к орбитам спутников.

Поразительное совпадение наблюдательных данных с тем, что следовало бы ожидать на основе сделанных предположений, является весьма убедительным свидетельством в пользу последних. При этом было бы неправильно воспринимать незначительные расхождения фактических данных с теоретическими как доказательство неполноты или неточности теории, так как теория в данном случае говорит лишь о том, что отношения периодов элементов колебательной системы должны быть *близки*, но вовсе не равны теоретически вычисленным минимумам плотности. Именно в этой приближенности к теоретическому оптимуму реально наблюдаемых результатов проявляется вероятностный характер связи явлений резонанса с распределением рациональных чисел – одно из основных следствий этой закономерности. Если бы эта связь была не вероятностной, а строго детерминированной и действовала бы только при совершенно точных отношениях периодов (рациональных или иррациональных), то были бы невозможны ни музыка, ни телевидение, ни другие многочисленные применения явления резонанса. Это следует уже из того, что само определение «точной» рациональности отношений периодов, подверженных непрерывным изменениям, лишено практического смысла.

Следует особо подчеркнуть, что все сказанное относительно устойчивости планетных орбит, характеризуемых иррациональными отношениями периодов, полностью опирается на известную теорему Лапласа и выводы, полученные В.И. Арнольдом в его работе «Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона». Теорема Арнольда–Колмогорова является в известном смысле завершением теоретического исследования об устойчивости Солнечной системы, начатого два столетия назад работами Лапласа и Лагранжа. Эта теорема с полной строгостью утверждает устойчивость таких систем на неограниченных отрезках времени при условии иррациональных отношений отдельных осцилляторов и, наоборот, допускает нарушение устойчивости при начальном отношении параметров орбит, *близком* к резонансу [6-8].

Подход к этому вопросу с позиций теории чисел позволяет в дальнейшем судить о направлении эволюции планетных орбит и, основываясь на метрической теории цепных дробей, перейти от качественного рассмотрения вопроса к определению количественной меры устойчивости таких колебательных систем.

В этом случае окажется уже недостаточен второй порядок приближения функций плотности распределения рациональных чисел на прямой. Такое представление является наиболее простым и наглядным примером связи между резонансом и распределением чисел, но при этом дает лишь самое грубое приближение действующих здесь закономерностей. Для более глубокого знакомства с этим вопросом необходимо построение приближений более высоких порядков.

8. Приближения третьего и более высоких порядков

Говоря о минимумах плотности рациональных чисел второго порядка, мы имели в виду только иррациональности, являющиеся корнями квадратного уравнения

$$\alpha^2 + p\alpha - 1 = 0,$$

где p – целое число.

В более общем случае значительная часть того, что было сказано относительно обоснования расположения на числовой оси минимумов плотности рациональных чисел, или, иначе, расположение тех алгебраических чисел – квадратичных иррациональностей, которые в данной окрестности хуже других аппроксимируются рациональными числами, может быть распространена на полное квадратное уравнение

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0,$$

где все коэффициенты a, b, c – целые числа.

Бесконечные цепные дроби, соответствующие корням этого уравнения, имеют более сложную структуру, вообще зависящую от арифметических свойств коэффициентов. Все такие дроби сохраняют периодичность, свойственную квадратичным иррациональностям, однако величина периода, который в первом случае всегда равен единице, теперь, по-видимому, ничем не ограничена и может иметь сколь угодно сложную структуру. Поэтому некоторые из тех простых следствий, которые сопутствовали приближениям второго порядка, теперь уже не могут иметь места.

Тем не менее, если ввести ограничение

$$\frac{c}{a} = -1,$$

то расположение минимумов плотности на числовой плоскости еще сохраняет симметрию относительно прямой $y = x$ или, что то же самое, сохраняется условная симметрия в расположении минимумов на числовой прямой относительно единицы.

Если не делать этого ограничения и для вычисления последующих минимумов плотности пользоваться квадратным уравнением в полной форме, то имеет место более сложная система иерархической симметрии. В этом случае расположение минимумов плотности третьего и более высоких порядков, изображаемых корнями полного квадратного уравнения, а затем и корнями уравнений с целыми коэффициентами более высоких степеней, оказывается симметричным относительно лучей, проведенных, вообще говоря, через рациональные числа предшествующего порядка.

С увеличением порядка приближения число фиксируемых минимумов плотности растет весьма быстро и уже приближения третьего порядка, изображенные в форме графика, не дают столь простой и наглядной картины, как изображенные на рис. 5 приближения второго порядка. Тем не менее эти приближения высших порядков играют существенную роль в ряде физических процессов, определяемых более тонкими и чувствительными связями с явлениями резонанса, в частности такими, которые связаны с представлением колебаний в форме разложения в тригонометрические ряды.

Нетрудно заметить, что график распределения рациональных чисел второго порядка, представленный на рис. 5*а* и запись величины резонанса в электрическом контуре на рис. 5*б*, можно рассматривать как некоторые аналоги изображения разложения в ряд Фурье белого шума.

Действительно, подавая на вход колебательного контура, имеющего собственную частоту ω_0, сигнал переменной частоты и постоянной амплитуды мы как бы имитируем на входе такого резонансного фильтра некоторую усредненную функцию $\Phi(x)$ – белый шум, сигнал почти постоянной спектральной плотности и амплитуды. Такой сигнал отличается от обычного белого шума лишь тем, что если в первом случае все составляющие белый шум частоты передаются одновременно, то здесь они дискретизированы по частоте и передаются последовательно во времени. Резонансный фильтр, построенный так, что помимо основной частоты он в той или иной мере пропускает и кратные гармоники, то есть частоты $2\omega_0$, $3\omega_0$ и т.д., осуществляет физический процесс, который в математическом смысле является разложением белого шума $\Phi(x)$ в тригонометрический ряд. Так как технически невозможно выполнить фильтр с нулевой шириной полосы пропускания, резонансные максимумы такого фильтра, показанные на графике рис. 5*б*, всегда имеют конечную ширину, зависящую от добротности колебательной системы. На рис. 5*б* масштаб чертежа и параметры фильтра подобраны так, чтобы в целях наглядности получить наибольшее сходство между таким экспериментальным графиком и совершенно абстрактным изображением распределения плотности рациональных чисел на числовой прямой. При ином масштабе по вертикали, таком, при котором максимумы функций не выходили бы за границы чертежа, ординаты этих максимумов дали бы приближенное значение коэффициентов Фурье разложения в тригонометрический ряд того белого шума, который получился бы, если бы на вход системы все частоты подавались бы не последовательно, а одновременно. При полностью идеализированном процессе мы должны были бы получить семейство вертикалей, имеющих ординаты, равные амплитуде, то есть коэффициенту Фурье C_n, а абсциссы – соответствующим индексам $\frac{1}{n}$ разложения в ряд функции:

$$\Phi(x) = \sum_{-n}^{n} C_n e^{in\omega x} .$$

В принципе такую же картину представляет собой и график плотности рациональных чисел второго порядка приближения, представленный на рис. 5*а*. При условии ограниченного значения знаменателей дробей, участвующих в построении, должна существовать некоторая величина $Ra(x)_{\max}$ – максимальное значение функции на отрезке $0 \div 1$ числовой оси. Тогда можно, поделив функцию $Ra(x)$ на ее максимальное значение:

$$\frac{Ra(x)}{Ra(x)_{\max}},$$

получить графическое изображение, сколь угодно близкое к той же идеализированной картине разложения белого шума в ряд Фурье, то есть семейство почти вертикалей, ординаты которых пропорциональны коэффициентам Фурье, а абсциссы – тем значениям частот, по которым ведется разложение в ряд. То есть, если

$$\Phi(x) = \sum_{-n}^{n} C_n e^{in\omega x}$$

представляет собой белый шум – хаотическую смесь различных колебаний, то выражение

$$\frac{Ra(x)}{Ra(x)_{\max}} = F(x)$$

совпадает с разложением спектра этой функции в тригонометрический ряд по ортогональной системе функций.

Все сказанное справедливо для функции распределения плотности рациональных чисел второго порядка. Для функций более высоких порядков положение усложняется, так как в этом случае спектральная картина соответствует разложению в тригонометрический ряд по системе уже не целых, а дробных индексов. Это не меняет принципиальной стороны дела, но вносит заметное усложнение картины. Введение дробных индексов подобно тому, как если бы в физическом эксперименте мы применили аппаратуру, обладающую большой чувствительностью к малым параметрам, несущественным и даже мешающим при грубой оценке явления в целом, но имеющим решающее значение для более тонких исследований. Такое далеко идущее сходство физических и теоретико-числовых закономерностей отнюдь не случайно. В этом проявляется глубокая связь и общность законов природы, единство и, можно сказать, объективная правильность и однозначность той физико-геометрической картины окружающего мира, которой мы руководствуемся в наших исследованиях.

Простым и наглядным, наглядным в самом буквальном смысле этого слова, примером является только что упоминавшийся белый шум, или, что с точностью до длины волны то же самое, – белый свет. Известно, что белый свет Солнца, как и белый шум, представляет собой хаотическую смесь электромагнитных колебаний разных частот. Исследованиями Юнга, Гельмгольца, Максвелла и других авторов была создана так называемая теория трехцветного зрения. Было установлено, что наш глаз имеет три сорта светочувствительных элементов, обладающих избирательной чувствительностью к различным участкам спектра – зеленому, красному и синему. Это как бы набор микроскопических светофильтров, по своим физическим свойствам вполне аналогичных тем электрическим фильтрам, которыми мы пользовались для того, чтобы получить картину электрического резонанса на рис. 5*б*. Каждый желающий может увидеть весьма полную и точную физическую аналогию этих свето- и цветочувствительных элементов, если посмотрит в лупу на экран цветного телевизора. В этом отношении он построен по совершенно такому же принципу, что и глаз.

Многочисленными опытами были установлены те частоты или длины волн света, которым соответствуют максимумы чувствительности человеческого глаза к каждому из трех основных цветов. Без этого было невозможно развитие таких отраслей промышленности и культуры, как полиграфия, цветное кино, фотография и телевидение. Было установлено, что смешением в тех или иных пропорциях этих трех основных цветов можно получить практически любой цвет, встречающийся в природе. Но это совершенно подобно тому, как, подбирая соответствующие коэффициенты Фурье, мы можем посредством тригонометрического ряда представить почти любую функцию, ибо окраска любого предмета есть не что иное, как некоторая функция распределения отражательной способности по отдельным участкам спектра.

Однако здесь дело значительно сложнее. Прежде всего, любой зрительный образ, даже самый простой, за крайне редкими исключениями, не является периодической функцией пространства или времени. Это следует уже из того, что главное назначение зрения – нести информацию, а никакая периодическая функция сама по себе не несет никакой информации, кроме факта своего существования. Полезную информацию способны передавать лишь изменение периодической функции, ее модуляция, отклонение от строгой периодичности. Кроме того, наша способность воспринимать в форме света электромагнитные колебания охватывает по частоте меньше одной октавы – от $4{,}3\cdot10^{14}$ до $7{,}5\cdot10^{14}$ Гц, и в пределах планеты Земля и даже Солнечной системы этот диапазон принципиально не может быть существенно расширен. Поэтому физически невозможно представление наших зрительных образов разложением в обычный ряд Фурье по ортогональной системе функций. Такое разложение состояло бы всего из одного члена ряда, для второго уже не хватило бы частоты.

И тем не менее… мы видим цвета окружающего нас мира благодаря какому-то механизму анализа действительности и затем синтеза, сложения из этих трех элементарных цветов, из трех функций переменного электромагнитного поля единого цветного образа. И представляется бесспорным, что существует глубокая аналогия между этим процессом анализа-синтеза, называемым «зрением», и тем, что мы понимаем под математическим термином «разложение в тригонометрический ряд».

Амплитудно-частотные характеристики трех основных цветов могут быть определены только экспериментально, путем опроса достаточно большого числа независимых наблюдателей. Такие работы проводились неоднократно различными исследователями, на их материалах строятся цветовые характеристики кино, полиграфии и телевидения. Один из результатов таких исследований приведен на рис. 6.

Если принять для зеленого цвета наиболее вероятное значение максимума амплитудно-волновой характеристики $\lambda_{зел} = 533$ нм – это среднее из наблюдений Гилда, Максвелла, Райта, Буля и Жоли, а для красного и синего цветов соответственно $\lambda_{кр} = 629{,}19$ нм и $\lambda_{син} = 451{,}52$ нм, что так же соответствует средним значениям из ряда наблюдений, то отношения этих величин будут выражаться следующими числами: 451,52; 533; 629,19 или, принимая длину волны зеленого цвета за единицу: 0,8471271:1:1,1804604. Нетрудно заметить, что $0{,}8471271 = 1:1{,}1804604$, то есть эти числа образуют ряд α^{+1}, α^{0}, α^{-1}, где

$$\alpha^{+1} = 0{,}8471... = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+...}}}}} = \frac{\sqrt{37}-1}{6}.$$

Но $\frac{\sqrt{37}-1}{6}$ это, как нетрудно убедиться, один из минимумов плотности рациональных чисел, получающийся при построении системы приближений третьего порядка и отвечающий корню квадратного уравнения:

$$\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha - 1 = 0.$$

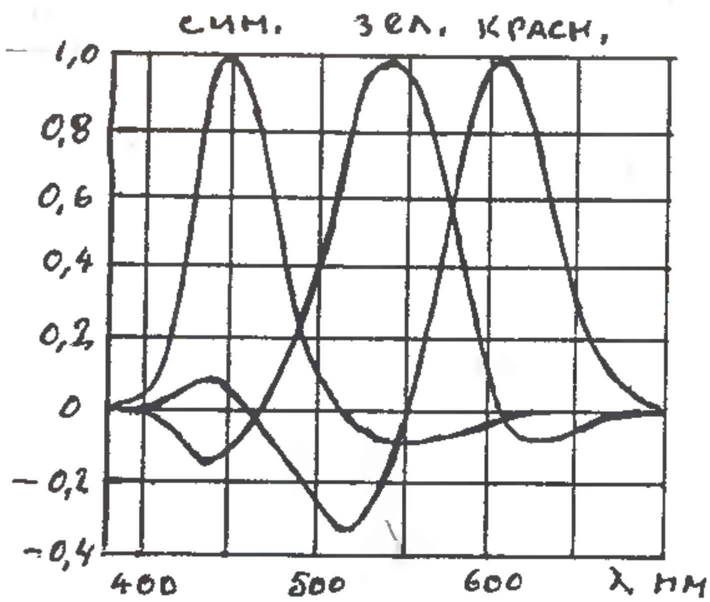


Рис. 6. Амплитудно-волновая характеристика основных цветов – синего, зеленого и красного. Функции сложения цветовой системы кинескопа

Положение этого минимума на числовой оси отмечено на рис. 5*а* пунктирной линией, а на рис. 7 приведен в увеличенном масштабе участок числовой оси между числами 2/3 и 6/7, где также отмечено положение этого минимума плотности рациональных чисел.

Закономерно поставить перед собой вопрос: почему природа в процессе эволюции пришла именно к такому решению задачи цветного зрения? В чем кроется оптимальность, если согласиться с тем, что смысл естественного отбора состоит именно в поиске и закреплении оптимальных решений, отвечающих требованию наибольшей приспособленности организма к внешним условиям при минимальных затратах?

Для ответа на этот вопрос нужно, прежде всего, еще раз повторить то положение, что передача информации, если она совершается посредством колебательного процесса, осуществляется лишь за счет отклонения от функции периодичности. В этом смысле максимум информации потенциально содержит лишь полностью апериодический белый шум, но это утверждение равносильно тому, что глыба мрамора потенциально содержит в себе все те скульптуры, которые могут быть из нее высечены. Однако такие утверждения имеют смысл всего лишь потенциальной возможности, потому что скульптуру все же нужно изваять для того, чтобы она радовала глаз. Применительно к процессу передачи информации такое ограничение, отсекание лишнего, реализуется в форме почти периодической функции. Практически все виды передачи информации, в основе которых лежат те или иные волновые процессы, будь то свет, звук, радио, кино или телевидение, являются почти периодическими функциями времени. Почти периодические функции – это обширный класс функций, впервые исследованный Г. Бором, в который как частный, предельный случай входят функции периодические и, как частный случай последних, гармонические функции, используемые для представления тех или иных процессов в форме разложения в тригонометрический ряд.

В процессе формирования нашего зрительного аппарата природе пришлось находить оптимальный компромисс, который минимизировал бы значительное количество различных параметров, о большинстве которых мы или не знаем ничего, или можем строить только более или менее обоснованные догадки.

К таким условиям, вероятно, должно относиться требование, чтобы общее число различных спектральных зон и, следовательно, число различных типов цветочувствительных элементов было минимальным. Вместе с тем для передачи наиболее точной картины действительности это число должно быть как можно больше. В то же время диапазон спектральной чувствительности глаза должен быть возможно более широким, однако невыгодно расширять его за пределы энергетического максимума солнечного излучения. С последней точки зрения спектральная чувствительность глаза весьма рациональна – она практически совпадает с максимумом интенсивности солнечного излучения. Мы, возможно, немного выиграли бы в борьбе за существование, если бы могли видеть в темноте инфракрасное излучение, но, это, вероятно, не внесло бы существенных изменений в судьбу человечества, так как было бы достигнуто слишком дорогой ценой. Тем более, что, надо полагать, необходимость выйти победителем в борьбе с природой предъявляла нашим далеким предкам и другие столь противоречивые требования. В том числе, наверное, и обеспечение максимальной информационной емкости сигнала и другие условия оптимизации, связанные с явлениями резонанса, или, наоборот, его отсутствия.

Применительно к процессам передачи информации резонанс возникает при суммировании ортогональной системы функций, при котором образуется снова периодическая функция существенно меньшей частоты, не несущая информации больше чем на одном периоде. Поэтому для того, чтобы сумма нескольких функций могла нести какую-то информацию, она должна быть не периодической, а почти периодической функцией, то есть иметь те или иные отступления от строгой периодичности. Если информация передается посредством сумм гармонических колебаний, а свет – это именно такая сумма, то суммарная функция может быть почти периодической только в том случае, если отношение периодов слагаемых функций иррационально. Это, в частности, весьма близко корреспондирует с теорией Колмогорова–Арнольда устойчивости планетных систем. В этом случае также выдвигается требование, чтобы некоторые параметры были представлены почти- или, по терминологии Арнольда, условно периодическими функциями.

Отсюда следует, что сигнал $S(t)$, несущий информацию, если он представлен модифицированным рядом Фурье

$$S(t) = \sum C_m \varphi(t)$$

сможет нести тем больше информации, чем больше НЕортогональность составляющих его функций, то есть чем больше интеграл

$$\left| \int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m(t)dt \right| = \max,\ n \neq m.$$

(Равенство нулю этого интеграла принимается как условие ортогональности двух функций.)

Под термином «модифицированный» ряд Фурье в данном случае понимается ряд Фурье, коэффициенты которого определяются условием

$$C_m^* = \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} \varphi(t) e^{-in\omega t} dt,\ \delta t \approx \frac{1}{\omega},$$

где интеграл с переменными пределами есть функция Стеклова, а индекс n равен $n = \alpha^m$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ и α – один из минимумов плотности рациональных чисел.

Практически это означает, что процесс передачи информации, если он осуществляется посредством сумм некоторого числа гармонических колебаний постоянной частоты и переменной амплитуды, окажется наиболее эффективным и экономичным, если отношения периодов составляющих колебаний будут соответствовать минимумам плотности рациональных чисел на числовой оси. В противном случае, если отношения периодов рациональны, суммарная функция обязательно в той или иной мере будет обладать периодичностью, обусловленной резонансом кратных частот. Это проявляется в форме систематической помехи, подобной систематическому возмущению планетных орбит. С такими явлениями нередко приходится сталкиваться в технике, например в телевидении, когда на экране видны темные или светлые полосы, или слышно постороннее гудение в репродукторе. Все это – воздействие паразитных частот, попадающих в резонанс с той основной частотой, которая содержит полезную информацию.

В процессе эволюции природа шла разными путями. Естественный отбор оставлял и развивал те принципиальные решения, которые обеспечивали лучшую приспособляемость в борьбе за существование.

В решении задачи цветного зрения природа оказалась перед выбором двух принципиально различных путей развития – дискретного и непрерывного. В математическом смысле это можно сравнить с моделированием функции в форме интеграла Фурье или разложения в ряд по дискретным значениям. Нужно напомнить, что всякий процесс восприятия информации, будь то слух, зрение или осязание есть процесс моделирования в нашем мозгу некоторой функции, однозначно и адекватно отображающей внешнее раздражение, которое, в свою очередь, всегда является некоторой функцией пространства и времени. Естественно, такое отображение должно быть, с одной стороны, максимально точным, а с другой стороны, достигаться с минимальными затратами. Применительно к зрению природа решила задачу построения амплитудно-частотной характеристики внешнего мира так, что амплитуды передаются непрерывными функциями (непрерывными в том смысле, что если в масштабе микромира они и являются дискретными или квантованными, то эта дискретность лежит за порогом разрешающей способности нашего сознания). Что же касается частоты, то она передается, как уже было показано, дискретным рядом функций – разложением в модифицированный ряд Фурье по неортогональной системе функций. Если $\Phi(x)$ – функция, описывающая наше зрительное восприятие цвета, то

$$\Phi(x) = \sum_{n=-1}^{n=1} C_n^* e^{i\lambda_n t},$$

где n = 0, –1, +1, C_n^* – переменный коэффициент Фурье, $\lambda_n = \omega_0 \alpha^n$, $\omega_0 = 533$ нм, $\alpha = \dfrac{\sqrt{37}-1}{6}$.

Трудно сказать – почему природа стала моделировать частоту излучения, то есть то, что мы называем цветом, посредством смешения трех основных цветов. Вообще, в принципе представляется возможной система, непосредственно реагирующая на частоту, подобно тому, как УКВ-приемник непосредственно реагирует на модуляцию частоты сигнала. Однако, и это весьма существенно, в рамках заданных условий природа выбрала безусловно оптимальный вариант. Чувствительность глаза охватывает по частоте практически весь диапазон солнечного излучения – невидимая инфракрасная составляющая энергетически существенно слабее видимого света, а ультрафиолетовая часть спектра почти полностью задерживается атмосферой. Оставшееся «окно» – это все цвета, которые мы видим. Далее, если считать, что минимально допустимое число членов разложения в ряд Фурье и, соответственно, число спектральных зон должно быть не менее трех и отношения их частот должны соответствовать минимумам плотности рациональных чисел, то этим условиям лучше других отвечает число $\frac{\sqrt{37}-1}{6}$, полученное путем построения функции плотности рациональных чисел третьего порядка приближения. Применительно к условиям нашего зрения оно оптимизирует ряд противоречивых параметров – при наименьшем порядке приближения и наименьшем значении коэффициентов квадратного уравнения оно позволяет разместить в пределах солнечного спектра наибольшее количество неортогональных гармоник и при этом обеспечивается относительно худшая аппроксимация этого числа посредством рациональных дробей, или, образно говоря, наибольшая «глубина» минимума плотности рациональных чисел в этой окрестности числовой оси.

Это дает основание полагать, что для наших земных условий природа выбрала действительно оптимальное решение, ключ к которому лежит в законе распределения рациональных чисел или в конечном счете в распределении чисел в натуральном ряде.

В этом очерке мы смогли коснуться только двух примеров, показывающих ту тесную связь, которая существует между распределением рациональных чисел на числовой оси и физическими процессами, определяемыми резонансом колебательных систем. Эти примеры отнюдь не исчерпывают всех возможных связей. Эмпирически найденные зависимости «Золотого сечения» и рядов Фибоначчи в наше время получают все более широкое применение в различных областях знания, таких, например, как теория информации, в цифровой технике, в тех физических и технических устройствах, действия которых в той или иной мере связаны с числами и колебаниями.

Авторы приносят свою искреннюю благодарность к.ф.-м.н. П.Н. Антонюку, к.ф.-м.н. С.А. Ашманову, академику АН СССР Н.Н. Моисееву, члену-корреспонденту АН УССР В.П. Шелесту за то, что они взяли на себя труд посмотреть эту работу, и за те ценные замечания, которые были ими сделаны.

Литература

1. *Планк М.* Единство физической картины мира. М.: Наука, 1966.
2. *Галилей Г.* Беседы и математические доказательства. М., 1934.
3. *Minkowski H.* Geometrie der Zahlen. Lpz.-B., 1953.
4. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. М., 1933.
5. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. М., 1978.
6. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. М., 1977.
7. *Демин В.Г.* Судьба Солнечной системы. М., 1975.
8. *Арнольд В.И.* Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова // Успехи математических наук. 1963. Т. 18. № 5 (113). С. 9–36.
9. *Домбровский К.И.* Распределение рациональных чисел и резонанс // Проблемы теории гравитации. Вып. 16. М., 1985.
10. *Jones W., Thron W.* Continued Fractions. 1980.
11. *Стахов А.П.* Коды золотой пропорции. М., 1984.

NUMBER DISTRIBUTION AND RESONANCE

K. Dombrovsky, K. Stanyukovich

All-Russian Research Institute of Metrological Service
46 Ozernaya St, Moscow, 119361, Russian Federation

Abstract. The article discusses the relationship between the periods of oscillation of physical systems with the problem of distribution of rational numbers on the number axis. The representation of numbers by continued fractions is also considered. Particular attention is paid to the physical consequences of the ratios of the periods of oscillations, such as the connection of the "golden section" with the law of distribution of planetary distances, the connection of the laws of information transmission processes with the sensitivity of the human eye realized in nature.

Keywords: periods of oscillation, resonance, rational numbers, continued fractions, golden ratio, planetary distances, sensitivity of the human eye