DOI: 10.22363/2224-7580-2020-2-28-33

ОДНОЧАСТИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ В РЕЛЯЦИОННОЙ ПАРАДИГМЕ

А.В. Соловьёв

Физический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Обсуждается квантовое описание свободных частиц в псевдофинслеровых импульсных пространствах, возникающих в одном из реляционных подходов к физике и геометрии пространства-времени. Показано, что для волновых функций таких частиц можно определить инвариантное унитарное скалярное произведение, обеспечивающее стандартную квантово-механическую вероятностную интерпретацию. В качестве простейшего примера рассмотрено описание бесспиновой частицы.

Ключевые слова: реляционная парадигма, псевдофинслерова геометрия, волновые функции в импульсном представлении.

Прогресс в физике часто сопровождался изменением геометрической модели пространства-времени. Так, специальная теория относительности наиболее естественно формулируется в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве Минковского. Общая теория относительности наделяет пространство-время структурой псевдориманова многообразия и связывает его метрический тензор с гравитацией. Многомерная общая теория относительности, возникшая первоначально как пятимерная теория Калуцы – Клейна, вводит дополнительные измерения пространства-времени и позволяет объединить гравитацию с другими известными фундаментальными взаимодействиями на классическом уровне. В суперсимметричных расширениях теории поля используется суперпространство, в котором к обычным коммутирующим координатам добавляются антикоммутирующие спинорные координаты. Аналогичные изменения геометрии пространства-времени происходят в супергравитации и теории суперструн.

В ряде моделей квантовой гравитации (спиновые сети, каузальные множества, динамические триангуляции) реанимируется реляционный взгляд на пространство-время, восходящий к Г. Лейбницу и Э. Маху. Согласно этому взгляду наблюдаемое пространство-время формируется лишь на макроскопическом уровне в результате статистического усреднения квантовых характеристик непосредственно взаимодействующих друг с другом элементарных частиц. На уровне отдельных элементарных частиц классического пространства-времени просто не существует.

Один из реляционных подходов к физике и геометрии пространства-времени развивается в группе профессора физического факультета МГУ

Ю.С. Владимирова [1]. В рамках этого подхода естественным образом возникают спинороподобные объекты, названные финслеровыми N-спинорами [2–4]. Эти объекты порождают три серии n-мерных псевдофинслеровых векторных пространств, причем $n = N^2$, $N(N+1)/2$, $N(N-1)/2$, а N – любое натуральное число больше единицы (среди данных пространств есть и четырехмерное псевдоевклидово пространство с сигнатурой пространства Минковского). Эти пространства предлагается интерпретировать как обобщенные пространства импульсов частиц. Возникает закономерный вопрос: «Почему именно импульсов, а не координат?» Ответ может показаться несколько пространным и заключается в следующих рассуждениях.

С реляционной точки зрения у отдельной элементарной частицы не может быть координат. Последние имеют смысл только для макрообъектов. Важнейшей физической величиной, характеризующей частицу, является масса. Простейший вектор, зависящий от массы, – это импульс классической частицы. Мы привыкли к тому, что импульс макрообъекта пропорционален его скорости. Вычисление скорости требует знания координат макрообъекта в начальный и конечный моменты времени. Это действительно так для *средней скорости* макрообъекта. Однако во всех формулах, в которых фигурирует скорость, имеется в виду *мгновенная скорость* макрообъекта.

По определению, мгновенная скорость есть *предел* средней скорости при стремлении к нулю разности конечного и начального моментов времени. Этот предел зависит только от начального момента времени и не зависит от конечного. Он не является перемещением макрообъекта и принадлежит самостоятельному пространству скоростей, отличному от пространства координат. В дифференциальной геометрии это пространство называется касательным к многообразию. Ему же принадлежит импульс макрообъекта. Ситуация здесь вполне типична для теории пределов. Например, предел последовательности рациональных чисел вовсе не обязан быть рациональным числом, а может оказаться иррациональным числом.

Предел последовательности, вообще говоря, не принадлежит тому множеству, из которого берутся элементы последовательности. Поэтому импульс классического макрообъекта, хотя и нуждается для своего вычисления в координатах, лежит, тем не менее, в своем собственном пространстве, отличном от координатного пространства. В квантовой механике происходит окончательное разделение координатного и импульсного пространств. То, что мы по инерции называем импульсом квантовой частицы, на самом деле является вектором квантовых чисел (собственных значений оператора импульса, действующего в абстрактном гильбертовом пространстве квантовых состояний), не требующих для своего вычисления использования координат уже ни в каком виде. Поскольку эксперимент вынужденно имеет дело с классическими макроприборами, то при измерении происходит отождествление этого абстрактного вектора с тем импульсом частицы, который она имела бы, если бы была классической. В указанном смысле и будем понимать импульс элементарной частицы. Таким образом, еще не имея координат, уже можно говорить об импульсах и использовать их при построении реляционной теории.

Вернемся, однако, к псевдофинслеровым импульсным пространствам. Длина вектора p^a в них определяется формулой

$$|p|^m = G_{ab\dots c}\, p^a p^b \cdots p^c,$$

где $G_{ab\dots c}$ – симметричный по всем индексам постоянный метрический тензор, каждый индекс пробегает n значений, а общее количество индексов $m = N$ или $[N/2]$ (связь между размерностью n пространства и натуральным числом N указана выше). При $m = 2$ получаем обычные псевдоевклидовы длины. Уравнение «массовой оболочки» в таких пространствах имеет вид

$$G_{ab\dots c}\, p^a p^b \cdots p^c = M^m,$$

где p^a – импульс частицы, а M – ее масса. В частном случае четырехмерного импульсного пространства релятивистской классической механики оно представляет собой знаменитое соотношение *энергия – импульс – масса*.

Использование псевдофинслеровой геометрии, да еще многомерной, может показаться противоречащим всей имеющейся физической практике. В этой связи следует отметить одно важное обстоятельство, относящееся именно к тем псевдофинслеровым пространствам, о которых здесь идет речь. Оказывается, для четырехмерного наблюдателя n-мерный импульс p^a выглядит как набор, состоящий из лоренцева вектора, одного или нескольких майорановских спиноров и одного или нескольких лоренцевых скаляров [2; 3]. Эти геометрические объекты сплошь и рядом встречаются в теоретической физике, в них нет ничего необычного. Лоренцев вектор, конечно, надо ассоциировать с 4-импульсом частицы. Майорановские спиноры сами по себе являются ненаблюдаемыми величинами, и вопрос об их интерпретации пока следует считать открытым. А вот интерпретация скаляров имеет прецеденты в существующих теориях. Так, в пятимерной теории Калуцы – Клейна пятая компонента импульса пропорциональна электрическому заряду частицы. Естественно предположить, что оставшиеся скалярные компоненты n-мерного импульса p^a также пропорциональны некоторым скалярным характеристикам частицы, например ее массе. Что касается непривычности псевдофинслеровой геометрии, то можно с ходу привести пример тоже достаточно непривычной неевклидовой геометрии, буквально пронизывающей всю физику элементарных частиц: трехмерные импульсы релятивистской классической частицы с ненулевой массой образуют пространство Лобачевского. Но кто мог подумать во времена Н.И. Лобачевского, что его «воображаемая геометрия» имеет настолько прямое отношение к реальности?

Как псевдофинслеровы импульсные пространства, так и «массовые оболочки» в них обладают одинаковыми группами симметрий. Специфика теории финслеровых N-спиноров заключается в том, что эти группы симметрий содержат в себе гомоморфные образы матричных групп $\mathrm{SL}(N, \mathbf{R})$ и $\mathrm{SL}(N, \mathbf{C})$ [2; 3]. Последние имеют фундаментальное значение для развиваемой реляционной теории. Другие группы в ней не используются.

«Массовая оболочка», рассматриваемая как гиперповерхность в пространстве импульсов, сама является псевдофинслеровым пространством $n-1$

измерений, но теперь уже искривленным. Ее индуцированная метрика имеет вид

$$ds^m = g_{ab\dots c}(p)\, dp^a dp^b \cdots dp^c,$$

где $g_{ab\dots c}(p)$ – симметричные по всем индексам функции независимых компонент импульса, причем каждый индекс пробегает $n-1$ значение, а общее количество индексов по-прежнему равняется m. Упомянутое выше пространство Лобачевского обладает этой метрикой при $m = 2$ и $n = 4$, а его радиус кривизны пропорционален массе частицы.

До сих пор речь, в сущности, шла о классических частицах. Но на самом деле элементарные частицы являются квантовыми объектами. Поэтому возникает необходимость в совмещении квантовой механики с псевдофинслеровой геометрией. Поскольку координат у нас нет, но зато есть импульсы, то единственным представлением векторов состояний квантовой частицы, которым можно воспользоваться, является импульсное представление. Помимо естественности импульсного представления с отстаиваемой здесь реляционной точки зрения оно обладает также неоспоримыми математическими преимуществами по сравнению с широко распространенным координатным представлением. Остановимся на этом подробнее.

Достойно удивления тиражируемое практически во всех современных учебниках по квантовой теории поля утверждение о невозможности построить положительно определенную плотность вероятности из волновой функции релятивистской бесспиновой частицы. Это приводится как один из главных доводов в пользу «несостоятельности» релятивистской квантовой механики одной частицы и необходимости перехода к квантованию полей. Как будто не было классических работ Е. Вигнера и В. Баргмана о классификации неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре (то есть группы Лоренца, расширенной параллельными переносами системы координат). В этих весьма искусных математических работах Вигнер и Баргман, независимо друг от друга, построили все неприводимые представления группы Пуанкаре, реализовав их унитарными операторами, действующими на одночастичные волновые функции, зависящие от импульса. Со сводкой этих замечательных результатов можно ознакомиться в их совместной статье [5]. Оказалось, что «классификация всех унитарных представлений группы Лоренца… равносильна … классификации всех возможных релятивистских волновых уравнений» [5. С. 212]. Кроме того, «настоящее обсуждение не основывается на каких бы то ни было гипотезах о структуре волновых уравнений за исключением их лоренц-инвариантности. В частности, нет необходимости постулировать дифференциальные уравнения в конфигурационном пространстве. …Мы дадим для каждого представления… уравнение, решения которого преобразуются согласно этому представлению» [5. С. 213]. И наконец: «Чтобы построить эти представления явно, мы выберем в каждом случае одну из эквивалентных систем волновых уравнений, определим лоренц-инвариантное скалярное произведение (φ, ψ) …Мы будем работать в импульсном пространстве; это особенно просто, потому что импульсы (но не координаты) определяются группой Лоренца как бесконечно малые трансляции» [5. С. 216]. Наличие лоренц-инвариантных унитарных скалярных произведений волновых функций частиц произвольного спина как раз и обеспечивает возможность стандартной квантово-механической вероятностной интерпретации. Весьма примечательно, что эти скалярные произведения имеют относительно простой вид только для волновых функций импульсного представления. Они включают в себя интегрирование по «массовой оболочке» и суммирование по спиновому индексу.

Вдохновившись идеями Вигнера и Баргмана, можно попытаться обобщить их результаты на группы симметрий псевдофинслеровых импульсных пространств. Это дало бы полное квантовое описание свободных частиц с импульсами, лежащими в указанных пространствах. И если записать уравнения, выделяющие из всего пространства волновых функций подпространства неприводимых представлений групп симметрий, совсем несложно, то придумать инвариантные унитарные скалярные произведения волновых функций весьма не просто. Главная проблема состоит в определении инвариантной меры в интеграле по псевдофинслеровой «массовой оболочке». Автору удалось решить эту проблему для всех m и n, за исключением случаев, когда m – нечетное число, а n – четное.

Отвлекаясь от многокомпонентных волновых функций, соответствующих частицам с ненулевым спином, рассмотрим для простоты бесспиновую частицу (обобщение на ненулевой спин не вызывает принципиальных затруднений). В этом случае волновое уравнение тривиально и эквивалентно утверждению, что импульс p частицы лежит на «массовой оболочке» $G_{ab\ldots c}\, p^a p^b \cdots p^c = M^m$, а ее волновая функция $\psi(p)$ имеет только одну скалярную компоненту. Оказывается, при четном m всеми требуемыми квантовой механикой свойствами обладает следующее скалярное произведение волновых функций $\varphi(p)$ и $\psi(p)$:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int \varphi(p)^* \, \psi(p) \, |\mathrm{hdet}\{g_{ab\ldots c}(p)\}|^{1/m} dp^1 dp^2 \cdots dp^{n-1},$$

где * обозначает комплексное сопряжение, $\mathrm{hdet}\{g_{ab\ldots c}(p)\}$ – гипердетерминант Кэли [6], построенный по компонентам метрического тензора $g_{ab\ldots c}(p)$, а областью интегрирования является вся «массовая оболочка». При нечетном m соответствующая формула содержит некоторое обобщение гипердетерминанта, предложенное автором и совпадающее при $n = 3$, $m = 3$ с так называемым вторым гипердетерминантом Кэли [7].

Таким образом, получено SL(N, **R**)- или SL(N, **C**)-инвариантное квантовое описание *свободных* частиц с импульсами, принадлежащими псевдофинслеровым пространствам, которое обобщает стандартную релятивистскую квантовую механику таких частиц. Это описание является реляционным по своей сути и не требует использования пространственно-временных координат. Конечно, настоящая физика начинается только после включения взаимодействий между частицами. Один из вариантов, как это можно было бы сделать в рамках реляционной парадигмы, предложен в статье [8]. Перенесение соответствующих рассуждений с псевдоевклидовой на псевдофинслерову геометрию требует самостоятельного исследования, которое должно завершиться выводом правил Фейнмана, традиционных для квантовой теории взаимодействующих элементарных частиц. Однако в любом случае внешние линии диаграмм Фейнмана соответствуют свободным частицам, а амплитуды вероятностей простейших процессов рассеяния пропорциональны скалярным произведениям волновых функций. И то и другое мы уже умеем описывать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров Ю.С.* Реляционная концепция Лейбница–Маха. М.: ЛЕНАНД, 2017.
2. *Solov'yov A.V., Vladimirov Yu.S.* Finslerian *N*-spinors: Algebra // Int. J. Theor. Phys. 2001. V. 40. № 8. P. 1511–1523.
3. *Соловьев А.В.* Финслеровы *N*-спиноры с действительными компонентами // ТМФ. 2015. Т. 183. № 3. С. 359–371.
4. *Соловьев А.В.* Реляционные основания финслеровых спиноров // Метафизика. 2014. № 2. С. 100–105.
5. *Bargmann V., Wigner E.P.* Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 1948. V. 34. № 5. P. 211–223.
6. *Соколов Н.П.* Пространственные матрицы и их приложения. М.: ГИФМЛ, 1960.
7. *Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V.* Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants. Boston: Birkhäuser, 1994.
8. *Соловьев А.В.* Проблемы описания физических взаимодействий в реляционной парадигме // Метафизика. 2018. № 1. С. 16–23.

ONE-PARTICLE WAVE FUNCTIONS IN THE RELATIONAL PARADIGM

A.V. Solov'yov

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University

We discuss a quantum description of free particles in pseudo-Finslerian momentum spaces appearing in one of relational approaches to physics and geometry of space-time. It is shown that, for wave functions of such particles, we can define an invariant unitary scalar product which ensures the standard quantum mechanical probabilistic interpretation. As the simplest example, the description of a spinless particle is considered.

Keywords: the relational paradigm, pseudo-Finslerian geometry, wave functions in the momentum representation.